

Урок 3. **Степінь з натуральним та цілим показниками.
Властивості степенів. Одночлени та дії над ними****РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

формулювати означення степеня з натуральним та цілим показниками;

формулювати властивості степенів;

застосувати властивості степенів;

спрощувати степеневі вирази;

формулювати означення одночлена та стандартного вигляду одночлена;

виконувати дії над одночленами;

застосовувати властивості степенів для розв'язування задач.

II. Повторення

1. Виразіть у відсотках число $\frac{1}{5}$. (Пробне ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
2%	20%	50%	0,2%	1,5%

2. Журнал коштував 25 грн. Через два місяці цей самий журнал став коштувати 21 грн. На скільки відсотків знизилася ціна журналу? (ЗНО, 2011 р.).

А	Б	В	Г	Д
на 4 %	на $\frac{25}{21} \cdot 100\%$	на $\frac{4}{21} \cdot 100\%$	на 16 %	на 84 %

3. За використання базового пакета телевізійних програм абонент щомісяця сплачував 25 грн. Компанія запропонувала абонентові розширений пакет телевізійних каналів із щомісячною платою 60 грн. На скільки відсотків більше платитиме абонент щомісяця, якщо він погодиться з цією пропозицією компанії? (ЗНО, 2011 р., додаткова сесія).

А	Б	В	Г	Д
на 240%	на 140%	на 60%	на 35%	на $58\frac{1}{3}\%$

4. За переказ грошей клієнт повинен сплатити банку винагороду в розмірі 2% від суми переказу. Скільки всього грошей (у гривнях) йому потрібно сплатити в касу банку, якщо сума переказу становить 30000 грн? (ЗНО, 2009 р.).

А	Б	В	Г	Д
36000 грн	30600 грн	30060 грн	30030 грн	30006 грн

III. Означення степеня з натуральним показником

Як зручно записати добуток багатьох рівних множників?

Відповідь. У вигляді степеня.

Наприклад.

$$1) 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6; \quad 2) \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4; \quad 3) b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = b^7.$$

У загальному вигляді: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a}_n$, де n належить множині натураль-

них чисел.

a — **основа степеня;**

n — **показник степеня.**

Основа степеня визначає, яке число, буква, вираз множаться самі на себе.

Показник степеня визначає, скільки разів число, буква, вираз множаться самі на себе.

Вираз a^n називають «степенем» і дію піднесення до степеня також називають «степенем».

Наприклад. Шість у десятому степені: 6^{10} .

Зауваження. В українській мові слово «ступінь» — чоловічого роду.

IV. Властивості степенів

Як зручно виконувати дії з виразами, що мають багато рівних множників?

Наприклад, як обчислити значення виразу $7^{10} \cdot 7^6 : 7^{12}$?

Відповідь. Використовувати властивості степенів.

Властивості степенів із натуральними показниками

Нехай, a, b — дійсні числа, m, n — натуральні числа. Тоді виконуються рівності 1–5.

1. Правило множення степенів з однаковими основами.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$
$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n}.$$

2. Правило піднесення добутку чисел до степеня.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \text{ або } (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

3. Правило ділення степенів з однаковими основами.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0.$$
$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-m}.$$

4. Правило піднесення дробу (дробового виразу) до степеня.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0.$$

5. Правило піднесення степеня до степеня.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Приклад 1. Спростіть вираз $\frac{x^2 \cdot x^5}{x^3}$.

Розв'язання. $\frac{x^2 \cdot x^5}{x^3} = \frac{x^{2+5}}{x^3} = \frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4.$

Відповідь. x^4 .

Приклад 2. Знайдіть значення виразу $(3x^2y)^3 \cdot y^3$, якщо $x = 2, y = 0,5$.

Розв'язання. Спростимо вираз: $(3x^2y)^3 \cdot y^3 = 27x^6y^3 \cdot y^3 = 27x^6y^6 = 27(xy)^6.$

Спільний показник степеня, при обчисленні значень виразів, треба виносити за дужки, оскільки $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Тоді простіше знаходити значення виразу.

Якщо $x = 2, y = 0,5$, то $27(xy)^6 = 27(2 \cdot 0,5)^6 = 27 \cdot 1^6 = 27.$

Відповідь. 27.

V. Степінь з цілим показником

Як записувати «великі» числа, наприклад, відстані між планетами, зорями?

Як записувати «малі» числа, наприклад, масу електрона або молекули певної речовини?

Відповідь. Використати степінь числа 10 та застосувати означення степеня з цілим показником.

Наприклад.

1) Відстань від Землі до Полярної зірки приблизно дорівнює 4470000000000000 км, яку можна записати як $4,47 \cdot 10^{15}$ км.

2) Радіус атома Оксигену дорівнює 0,0000000066 см.

Якщо десятковий дріб перетворити в звичайний, то $0,0000000066 = \frac{66}{10^{10}}$ см.

Такі вирази можна записувати так: $66 \cdot 10^{-10} = 6,6 \cdot 10^{-9}$.

Наприклад, $\frac{1,6}{10^{20}} = 1,6 \cdot 10^{-20}$.

Тобто, якщо степінь «витягувати» зі знаменника, то пишуть від'ємний показник степеня: $\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, $\frac{1}{6^{-5}} = 6^5$ тощо.

Для будь-якого числа a , яке не дорівнює 0, і натурального показника степеня:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Наприклад, $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$, $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

Розглянемо рівність $\frac{a^n}{a^n} = 1$.

При діленні степенів з однаковою основою виконується правило $a^n : a^m = a^{n-m}$.

Тоді $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$. Отже, $a^0 = 1$.

Наприклад, $13^0 = 1$, $(-234)^0 = 1$, $(23,56)^0 = 1$.

Якщо звичайний дріб підносити до цілого від'ємного степеня, то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Наприклад, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

Приклад 3. Обчисліть: $3^{-2} + 2^{-2}$.

Розв'язання. $3^{-2} + 2^{-2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{4+9}{36} = \frac{13}{36}$.

Відповідь. $\frac{13}{36}$.

VI. Одночлени. Стандартний вигляд одночлена. Дії над одночленами

Алгебричні вирази поділяють на:

- **числові вирази;**
- **виразами зі змінними.**

Вирази зі змінними утворюють зі змінних (букв), чисел, знаків дій і дужок. Виразом зі змінною вважають й окремо взятую букву.

Алгебричні вирази зі змінними поділяють на:

- цілі вирази;
- дробові вирази.

Означення. Цілими називають вирази, що не містять дії ділення на буквені вирази.

Наприклад, $x + y$, $3a^2b - 4$, $\frac{2}{3}mn^3$, $\frac{a+b}{3}$ тощо.

Порада учням/ученицям. Дробовий вираз, у знаменнику якого деяке число, можна записати у вигляді дії множення.

Наприклад, $\frac{a+b}{3} = \frac{1}{3}(a+b)$.

Узагалі, якщо в знаменнику будь-яке число, крім нуля, то такий дріб можна записати як добуток: $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$, $-\frac{b}{8} = -\frac{1}{8}b$ тощо.

Означення. Вирази, що містять дію ділення на вираз зі змінною, називають дробовими виразами.

Наприклад, $\frac{2}{b}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{a+b}{c^2}$, $a - \frac{b+c}{d}$ тощо.

Цілі вирази поділяють на:

- одночлени;
- многочлени.

Означення. Одночленом називається алгебричний вираз, у якому числа і букви з'єднані лише двома діями — множенням і піднесенням до натурального степеня.

Наприклад, 10 ; $7a^2$; dc ; $-0,5p^2q^5r$; $35m^3n^4c^{10}$.

Отже, над одночленами можна виконувати лише дві дії: *множення та піднесення до натурального степеня*.

Стандартний вигляд одночлена

Якщо в одночлені добуток усіх його чисел записати перед буквами, а добуток кожної його букви і її степенів подати в натуральному степені цієї букви, то після такого перетворення одночлен вважають записаним у *стандартному вигляді*, а його числовий множник називають *коефіцієнтом одночлена*.

Приклад одночленів, записаних у стандартному вигляді:

$$\begin{aligned} -2a^2b^3 \cdot (-3ab^4) &= \mathbf{6a^3b^7} \\ m^2n \cdot 0,6mn^3 &= \mathbf{0,6m^3n^4} \end{aligned}$$

коefficientи

Степінь одночлена визначають як суму показників степенів усіх букв, з яких складається одночлен.

Наприклад. Степінь одночлена $15a^2b^3c^2d$ дорівнює 8, оскільки сума показників степенів букв $(2 + 3 + 2 + 1)$ становить 8.

Примітка. Степінь одночлена з однією буквою — це степінь цієї букви. Степінь одночлена, який є числом, дорівнює 0.

Приклад 4. Спростіть вираз $\left(-\frac{4}{5}ab^2\right)(-20a^4b)$.

Розв'язання. $\left(-\frac{4}{5}ab^2\right)(-20a^4b) = -\frac{4}{5} \cdot (-20) \cdot aa^4b^2b = 16a^5b^3$.

Відповідь. $16a^5b^3$.

VII. Розв'язування дослідницьких задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Яке найбільше число можна записати за допомогою трьох цифр, без використання знаків дій?

Задача 2. Обчисліть товщину газети, якщо її скласти 50 разів.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Запишіть у вигляді степеня:

1) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$;

3) $(xy) \cdot (xy) \cdot (xy) \cdot (xy)$;

5) $(2 + n) \cdot (2 + n)$;

2) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;

4) $(abc) \cdot (abc) \cdot (abc) \cdot (abc)$;

6) $(3a - 1) \cdot (3a - 1) \cdot (3a - 1)$.

2. Обчисліть:

1) 3^3 ;

4) $(-2)^4$;

7) 10^3 ;

10) -6^2 ;

13) $\left(2\frac{2}{3}\right)^2$;

16) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^2$;

2) 2^5 ;

5) $(-4)^2$;

8) $(-10)^4$;

11) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$;

14) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$;

17) $(-3 + 4)^5$;

3) $(-3)^4$;

6) $(-5)^2$;

9) -4^2 ;

12) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$;

15) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$;

18) $2^6 + (-3)^3$.

3. Виконайте дії зі степенями:

1) $(3a^3)^2$;

3) $(a^7)^4 : a^{14}$;

5) $(a^2)^6 \cdot a^3$;

7) $a^5 \cdot a^{12} : a^{15}$;

9) $a^{12} \cdot (a^3)^3 : a^{18}$;

11) $(m^3)^8 : m^6$;

2) $(6b^4)^2$;

4) $(b^4)^8 : b^{16}$;

6) $(b^3)^4 \cdot b^2$;

8) $b^7 \cdot b^8 : b^{14}$;

10) $a^{14} \cdot (a^2)^3 : a^{17}$;

12) $(a^2)^9 : a^3$;

- 13) $(-9x^5y^6)^2$;
 14) $(10a^4b^6)^2$;
 15) $(-8m^3n^6)^2$;
 16) $(-4m^4n^7)^2$;
 17) $(0,5x^3y^6)^2$;
 18) $(-0,3a^7b^5)^2$;
 19) $(6^4)^3 : 6^{10}$;
 20) $(4^3)^5 : 4^{12}$;
 21) $(0,6^4)^3 : 0,6^{10}$;
 22) $(0,4^5)^4 : 0,4^{18}$.

4. *Задача з єгипетського папіруса.* У семи осіб по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків ячменю, із кожного колоска ячменю дозріває по сім мір зерна. Скільки мір зерна буде збережено, завдячуючи цим кішкам?

5. Обчисліть:

- 1) $128^0 + (0,2)^{-3}$;
 2) $(3a^2)^3 : 9a^5$, якщо $a = -2$;
 3) $\frac{a^5 \cdot a^{-7}}{a^{-2}}$, якщо $a = 0,82$.

6. Спростіть вираз:

- 1) $a^{-2}b \cdot ab^{-2}$;
 2) $x^{-3}y : y^{-2}x$;
 3) $\frac{5c^{-1}d^3}{3} \cdot \frac{9c^6}{d^{-2}}$;
 4) $\frac{7b^{-4}}{a^{-6}} \cdot \frac{a}{21b^5}$.

7. До кожного виразу (1–4) при $a > 0$ доберіть тотожно йому рівний вираз (А–Д). (ЗНО, 2012 р.).

Вираз

- 1 $\frac{2a^5}{a^6}$
 2 $(2a)^5 \cdot a^6$
 3 $(2a^6)^5$
 4 $\frac{(a^5 \cdot a^4)^2}{2a^5}$

Тотожний йому вираз

- А $32a^{30}$
 Б $32a^{11}$
 В $2a^{-1}$
 Г $\frac{1}{2}a^{13}$
 Д $2a^{13}$

А Б В Г Д

- 1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
 2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
 3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
 4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

8. До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Д), якщо $y > 0$.

Вираз

- 1 $(y^2)^{-1}$
 2 $(y^{-2})^{-1} \cdot y^{-5}$
 3 $y^2 \cdot y^{-3}$

Тотожний йому вираз

- А y
 Б $\frac{1}{y}$
 В $\frac{1}{y^3}$
 Г y^2
 Д $\frac{1}{y^2}$

А Б В Г Д

- 1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
 2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
 3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Рівень В

1. Обчисліть:

- 1) $(0,3 - 0,5)^2$;
 2) $(0,4 - 0,7)^2$;
 3) $0,6^2 : 0,4 - 1$;
 4) $0,4^2 : 0,2 - 1$;
 5) $2 \cdot 6^2 - 3 \cdot (-2)^2$;
 6) $3^4 - 3^2 \cdot (2^2 - 1)$;
 7) $-3^4 + 3^2 \cdot (-2^2 + 1)$;
 8) $2 \cdot (-4)^2 - (2^3 - 1)$;
 9) $(3 - 7)^2 + (10 - 5)^2$;
 10) $(2 \cdot 3)^2 + (4 - 1)^3$.

2. Виконайте дії над одночленами:

1) $\left(-\frac{1}{3}a^2\right)^3$;

2) $\left(-\frac{1}{4}a^7\right)^2$;

3) $-2,2a^2 \cdot \frac{25}{44}a^3b$;

4) $(-2x^3y^2)^4$;

5) $-0,2x^3 \cdot \frac{5}{4}x^4y^2$;

6) $(-6m^3nk^2)^2$;

7) $\frac{1}{3}a^4b \cdot 0,6a^2b^5$;

8) $\frac{1}{6}b^3c \cdot 1,8b^4c^6$;

9) $0,7a^4b^6 \cdot \frac{1}{7}ab^2$;

10) $0,4a^3b^5 \cdot \frac{1}{4}ab^2$.

3. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{10} : \left(1\frac{2}{3}\right)^7 \cdot 27$;

2) $\frac{2^6 + (-3)^3}{(-9)^2 - 7}$;

3) $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$;

4) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;

5) $\frac{3^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}$;

6) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$.

4. Спростіть вираз:

1) $0,8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-6}$;

2) $\frac{7b^{-4}}{a^{-6}} \cdot \frac{a}{21b^5}$;

3) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$.

5. Подайте одночлен $4,4(a^2bc)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}b^2c\right)^2 \cdot ac^2$ у стандартному вигляді.

6. Обчисліть: $\frac{2^6 \cdot 5^6}{10^4}$. (ЗНО, 2013 р.).

7. Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Д).

Вираз

1 $8^3 \cdot 2^{-7}$

2 $(15,58)^0 - (0,3)^{-1}$

3 $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-6} : 0,6^4$

Значення виразу

А $-\frac{7}{3}$

Б $-\frac{3}{7}$

В $\frac{3}{5}$

Г 4

Д $\frac{9}{25}$

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Рівень С

1. Маса Землі дорівнює $6 \cdot 10^{24}$ кг, а Місяця — $7,4 \cdot 10^{22}$ кг. У скільки разів маса Місяця менша від маси Землі? Відповідь округліть до одиниць.
2. Середня відстань від Землі до Сонця дорівнює $1,5 \cdot 10^8$ км, а швидкість світла — $3 \cdot 10^8$ м/с. За скільки хвилин світло від Сонця дійде до Землі? Відповідь округліть до одиниць.
3. Спростіть вираз $\left(\frac{1}{3}mn^2\right)^4 \cdot (3m^3)^2 \cdot (-4,5)$.
4. За допомогою трьох двійок запишіть найбільше можливе число.
5. Подайте добуток одночленів $a^2b^3 \left(-\frac{21b}{4}\right) \left(\frac{8m^2ab}{7}\right) \left(-1\frac{1}{3}mb^2\right)$ у вигляді одночлена стандартного вигляду. Знайдіть степінь та коефіцієнт цього одночлена.
6. Подайте добуток одночленів $(0,2xy^2) \left(2\frac{1}{2}yax^2\right) \left(-\frac{3y^2ax^3}{4}\right) (2a)^3$ у вигляді одночлена стандартного вигляду. Знайдіть степінь та коефіцієнт цього одночлена.
7. Подайте одночлен у стандартному вигляді:
 - 1) $(-4m^2n^5)^3 \cdot (-2mn^3)^2$;
 - 2) $-2,2a^2b^3 \cdot \frac{25}{44}a^3b$;
 - 3) $\left(2\frac{1}{4}x^3y\right) \cdot \left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2$.
8. Розташуйте числа 2^{15} , 4^{10} , 10^5 у порядку зростання. (ЗНО, 2012 р.).
9. Розташуйте числа у порядку зростання: 2^{30} , 3^{20} , 7^{10} . (ЗНО, 2012 р.).
10. Обчисліть: $\frac{5^{-3} : 5^{-4} + 3^5 \cdot 3^{-4}}{2^{-3} + (0,28)^0 : 2}$.
11. Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Д).

Вираз

- 1 $(2a^2b)^2 \cdot ab^3$, якщо $a = 2$, $b = 0,5$.
- 2 $(mn^2)^3 \cdot 10nm^4$, якщо $m = 4$, $n = 0,25$.
- 3 $(xy^2z)^3 \cdot xzy^8$, якщо $x = \frac{1}{7}$, $y = -1$, $z = 7$.

Значення виразу

- А 4
Б -1
В 250
Г 10
Д 1

А Б В Г Д

1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

12. Установіть відповідність між одночленом (1–3) та його степенем (А–Д).

Одночлен

- 1 $-5c^3d \cdot 0,8c^2d$.
- 2 $-ab \cdot (-5a^2b^3)^2$.
- 3 $\left(\frac{1}{3}mn^2\right)^4 \cdot (3m^3)^2$.

Степінь одночлена

- А 18
Б 16
В 12
Г 9
Д 7

А Б В Г Д

1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

IX. Рефлексія

Мої враження від уроку

[illegible]

Поради собі для наступного уроку

Можливі теми проєктів

- 1.** Історичні задачі, розв'язання яких потребує розуміння степеня та його властивостей.
- 2.** Застосування степенів та їхніх властивостей у фізиці. Стандартний запис чисел.
- 3.** Обчислення значень складних степеневих виразів. Спрощення обчислень за допомогою степенів.
- 4.** Дій над одночленами. Застосування степенів та їхніх властивостей.
- 5.** Застосування степенів та їхніх властивостей у предметах природничого циклу.