10 Тема 5. Трикутники

Урок 8. Підсумковий урок з теми: «Трикутники»

План уроку

1. Повторення.
2. Формули для обчислення елементів трикутника.
3. Підсумкова самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки комплексних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2-1];

досліджує проблемну ситуацію, вишукуючи та долучаючи різноманітні джерела інформації, оцінює повноту і вірогідність інформації [12 МАО 1.2.1];

сприймає інформацію математичного змісту в різних формах [12 МАО 2.1.1];

аналізує та оцінює різні способи розв'язання і різні моделі комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1];

класифікує і структурує математичні поняття та факти [12 МАО 4.1.2-1];

застосовує визначену послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-3].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово упродовж викладення матеріалу.

2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

4) Повторіть з учнями/ученицями формули для обчислення елементів трикутника.

5) За потреби, розв'яжіть деякі з наведених ілюстративних прикладів.

6) Матеріал до уроку поданий з надлишком, тому вибирайте окремі приклади на власний розсуд відповідно до можливостей учнів/учениць класу.

7) Оскільки запропонований урок є узагальненням вивченого, то в рамках уроку варто провести самостійну роботу, яка може мати характер формувальної або діагностичної.

8) Розв'яжіть із учнями/ученицями практичну задачу зі взаємодію їх у групах.

9) Заохочуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми проєктів запропоновані. Захист індивідуальних або групових проєктів може бути альтернативою тематичної контрольної роботи.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи може існувати трикутник із двома прямими кутами?

2) Чи може існувати трикутник зі сторонами 4 см, 5 см, 9 см? Відповідь обґрунтуйте.

3) Чи можуть медіани, бісектриси й висоти у трикутнику збігатися?

4) Чи можна визначити вид трикутника за довжинами його сторін?

5) Чи зміниться площа трикутника, якщо одну зі сторін збільшити удвічі, а висоту, проведену до цієї сторони, зменшити удвічі?

II. Повторення (6 хв)

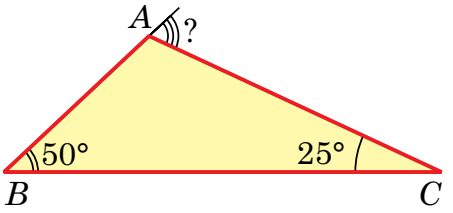
1. Які з наведених тверджень є правильними?
I. Сума будь-яких двох сторін трикутника менша від третьої сторони.
II. Сума двох будь-яких кутів трикутника більша за 90°.
III. Навпроти найбільшої сторони трикутника знаходиться найбільший кут. **(НМТ, 2025 р.).**

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише III	I та III	II та III

2. Задано довільний трикутник ABC, у якому AM — медіана. Які з наведених тверджень є правильними?
I. Точка M є серединою BC.
II. Промінь AM є бісектрисою $\angle A$.
III. Площа трикутника ABM дорівнює площі трикутника AMC. **(НМТ, 2025 р.).**

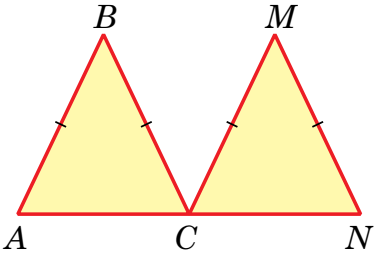
А	Б	В	Г	Д
лише I	I та II	II та III	I та III	I, II та III

3. Визначте зовнішній кут при вершині A трикутника ABC, якщо $\angle B = 50°$, $\angle C = 25°$ (див. рисунок). **(НМТ, 2025 р.).**



А	Б	В	Г	Д
15°	75°	95°	105°	130°

4. На рисунку зображено два рівні рівнобедрені трикутники ABC ($AB = BC$) і CMN ($CM = MN$), що лежать в одній площині. $AN = 8$ см, $AB = 2\sqrt{17}$ см. Установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Д). **(НМТ, 2025 р.).**



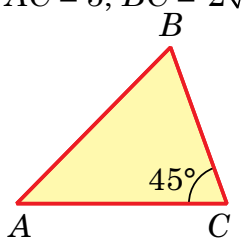
Відрізок	*Довжина відрізка*
1 Відстань від B до сторони AC	**А** 4 см
2 BM	**Б** 6 см
3 Відстань між серединами сторін AB і MN	**В** 7 см
	Г 8 см
	Д 10 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

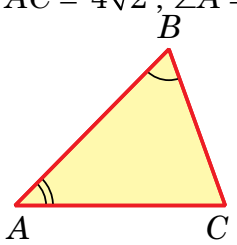
5. Установіть відповідність між елементом трикутника (1–3) та його значенням (А–Д).

Елемент трикутника

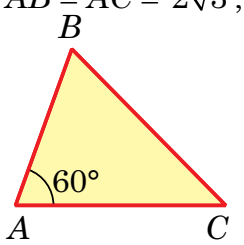
1 $AC = 5$, $BC = 2\sqrt{2}$, $\angle C = 45°$, $AB = ?$



2 $AC = 4\sqrt{2}$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, $BC = ?$



3 $AB = AC = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 60°$, $BC = ?$



Значення елемента трикутника

А $2\sqrt{3}$

Б $3\sqrt{3}$

В $4\sqrt{3}$

Г $\sqrt{13}$

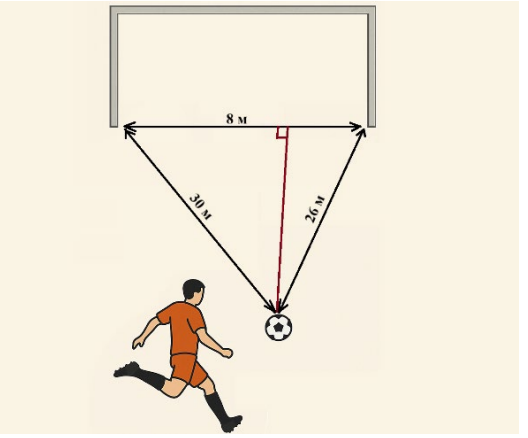
Д $2\sqrt{13}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Відповіді. **1.** В. **2.** Г. **3.** Б. 4. 1 – Г, 2 – А, 3 – Б. **5.** 1 – Г, 2 – В, 3 – А.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Футболіст наносить удар по м'ячу, що розташований на відстані 30 м від лівого кута воріт та 26 м від правого. Яку відстань має подолати футбольний м'яч до лінії воріт, якщо напрямок руху м'яча перпендикулярний до цієї лінії, а ширина воріт дорівнює 8 м?

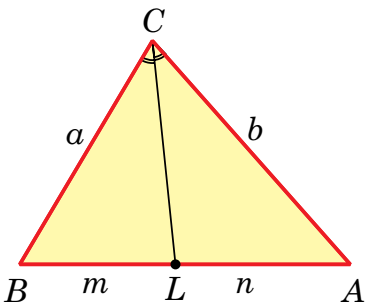


III. Формули для обчислення елементів трикутника

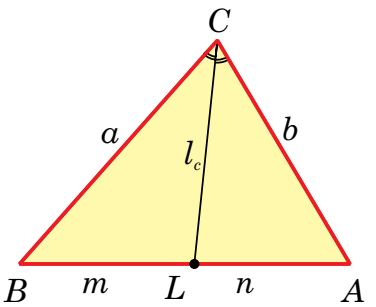
1. Бісектриса трикутника

1. Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам трикутника.

Тобто $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ (див. рисунок).



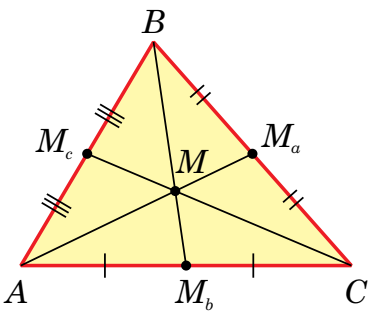
2. Довжина бісектриси трикутника обчислюється за формулою $l_c = \sqrt{ab - mn}$ (див. рисунок).



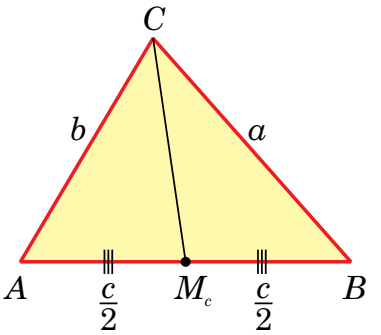
2. Медіани трикутника

3. Усі медіани трикутника перетинаються в одній точці так, що точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершин трикутника.

Тобто $\frac{AM}{MM_a} = \frac{BM}{MM_b} = \frac{CM}{MM_c} = \frac{2}{1}$ (див. рисунок).



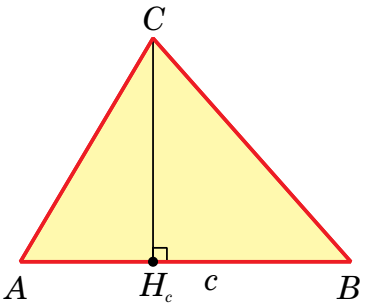
4. Довжина медіани трикутника обчислюється за формулою $m_c = \dfrac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$ (див. рисунок).



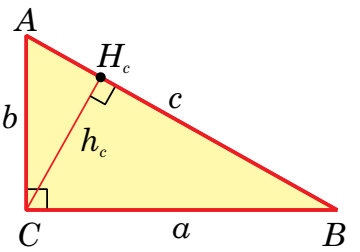
Наслідок. **Довжина медіани прямокутного трикутника, яка проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.**

3. Висота трикутника

5. Довжина висоти трикутника обчислюється за формулою $h_c = \dfrac{2S}{c}$, де S — площа трикутника, а c — сторона, до якої проведена висота.



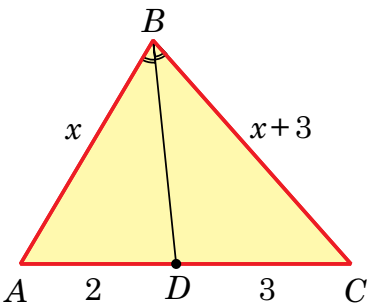
Наслідок. **Довжина висоти прямокутного трикутника, яка проведена до гіпотенузи, обчислюється за формулою $h_c = \dfrac{ab}{c}$, де a, b — катети трикутника, а c — гіпотенуза.**



Ілюстративні приклади (7–8 хв)

6. Бісектриса BD трикутника ABC поділяє сторону AC на відрізки завдовжки 2 см і 3 см. Відомо, що сторона AB на 3 см менша від сторони BC. Обчисліть периметр трикутника ABC та знайдіть довжину бісектриси BD.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).



2) Нехай $AB = x$ см, $BC = (x + 3)$ см.

3) За властивістю бісектриси трикутника ABC:

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$, тобто: $\dfrac{x}{x+3} = \dfrac{2}{3}$,

$3x = 2(x + 3)$, $3x = 2x + 6$, $x = 6$.

4) Отже, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см і $P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA =$
$= 6 + 9 + 5 = 20$ (см).

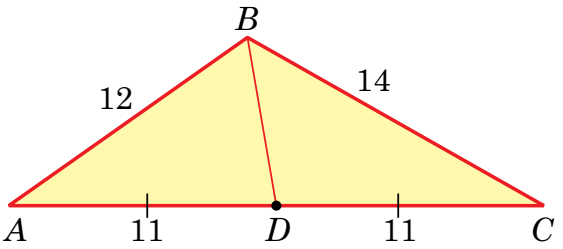
5) $BD = \sqrt{AB \cdot BC - AD \cdot DC}$, за властивістю бісектриси трикутника, тобто:

$BD = \sqrt{6 \cdot 9 - 2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$ (см).

Відповідь. 20 см; $4\sqrt{3}$ см.

7. Знайдіть довжину медіани трикутника зі сторонами 12 см, 14 см і 22 см, проведеної до найбільшої сторони.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).



2) За властивістю медіани:

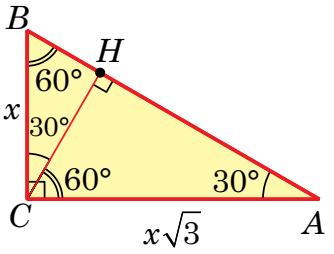
$$BD = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2}, \text{ тобто:}$$

$$BD = \frac{\sqrt{2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 14^2 - 22^2}}{2}, \; BD = 7 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 7 см.

8. Площа прямокутного трикутника дорівнює $2\sqrt{3}$ см². Знайдіть довжину висоти, проведеної до гіпотенузи цього трикутника, якщо вона ділить прямий кут у відношенні 1 : 2.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).



2) Оскільки $\angle BCH : \angle ACH = 1 : 2$, то:
$\angle BCH = 30°$, $\angle ACH = 60°$.

3) У прямокутних трикутниках AHC та BHC:
$\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$.

4) Нехай $BC = x$ см, тоді $AC = BC \cdot \text{tg}\angle B = x\sqrt{3}$ см.

5) Оскільки площа трикутника ABC дорівнює $2\sqrt{3}$ см², то складемо рівняння:

$$\frac{x \cdot x\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \; x^2 = 4, \; x = 2 \text{ (см)}.$$

6) Тоді $BC = 2$ см, $AC = 2\sqrt{3}$ см.

7) За теоремою Піфагора з ΔABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (см).

Тобто: $AB = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2}$; $AB = 4$ (см).

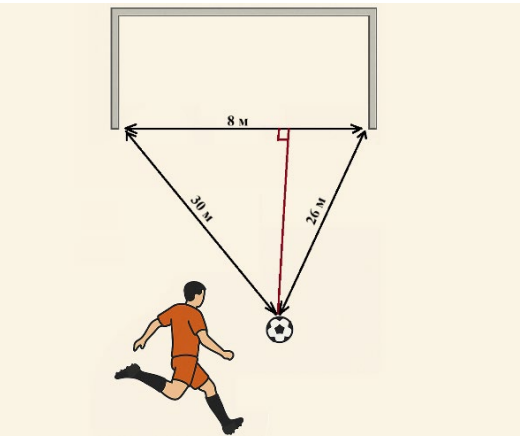
8) Отже, $CH = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \sqrt{3}$ (см).

Відповідь. $\sqrt{3}$ см.

IV. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Футболіст наносить удар по м'ячу, що розташований на відстані 30 м від лівого кута воріт та 26 м від правого. Яку відстань має подолати футбольний м'яч до лінії воріт, якщо напрямок руху м'яча перпендикулярний до цієї лінії, а ширина воріт дорівнює 8 м?



Розв'язання. 1) Площу трикутника (див. рисунок) обчислимо за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2) Оскільки $p = \dfrac{8 + 26 + 30}{2} = 32$ (м), то:

$S_{\Delta} = \sqrt{32 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 24} = 96$ (м²).

3) Шуканий відрізок є висотою h трикутника, проведеною до сторони завдовжки 8 м.

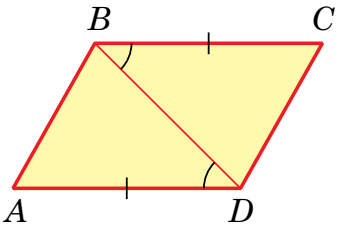
Тому: $h = \frac{2S_{\Delta}}{8} = \frac{2 \cdot 96}{8} = 24$ (м).

Відповідь. 24 м.

V. Самостійна робота (30–35 хв)

Варіант 1

1. На рисунку $BC = AD = 5$ см, $\angle CBD = \angle ADB = 76°$, $\angle BAD = 65°$. Знайдіть $\angle BCD$.



А	Б	В	Г	Д
60°	65°	76°	115°	120°

2. Внутрішні кути трикутника ABC відносяться, як 3 : 4 : 5. Визначте вид трикутника.

А	Б	В	Г	Д
рівносторонній	прямокутний	тупокутний	гострокутний	рівнобедрений

3. З'ясуйте, з яких трійок відрізків не можна побудувати трикутник.

А	Б	В	Г	Д
6 см, 5 см, 8 см	4 см, 8 см, 6 см	7 см, 9 см, 11 см	9 см, 5 см, 4 см	2 см, 2 см, 3 см

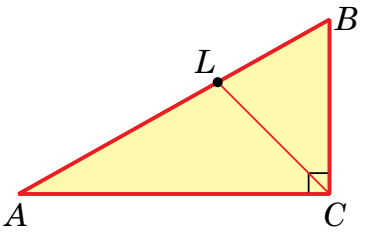
4. Знайдіть довжину катета рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює $3\sqrt{2}$ см.

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	3 см	5 см	6 см

5. Медіани трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайдіть довжину найбільшого з відрізків, на які медіани діляться точкою їхнього перетину.

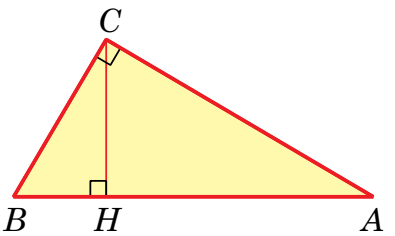
А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	10 см	12 см	14 см

6. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено бісектрису CL (див. рисунок). Відомо, що $AL = 10$ см, $BL = 5$ см. Знайдіть $\operatorname{tg}\angle B$.



А	Б	В	Г	Д
2	0,5	1,5	3	0,2

7. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо $AH = 8$ см, $BH = 4$ см (див. рисунок).

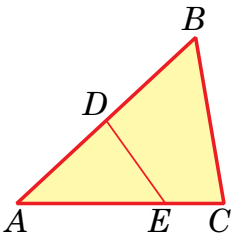


А	Б	В	Г	Д
32 см	12 см	$3\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{3}$ см

8. Обчисліть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $BC = 10$ см, $\angle A = 30°$.

А	Б	В	Г	Д
5 см	10 см	15 см	20 см	25 см

9. На сторонах AB і AC трикутника ABC (див. рисунок) позначили відповідно точки D і E так, що $AD = \frac{4}{7}AC$, $AE = \frac{4}{7}AB$. Знайдіть відрізок DE, якщо $BC = 21$ см.



А	Б	В	Г	Д
3 см	4 см	7 см	12 см	14 см

10. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо його катети дорівнюють 10 см і 24 см.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{50}{13}$ см	$\frac{60}{13}$ см	$\frac{120}{13}$ см	26 см	інша відповідь

11. Установіть відповідність між сторонами трикутника ABC (1–3) і твердженням (А–Д) про вид трикутника.

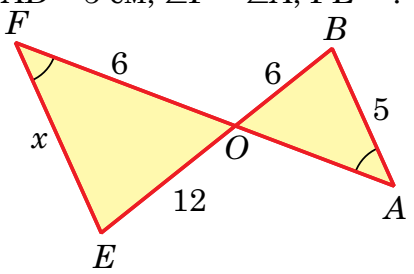
Сторони трикутника	*Вид трикутника*
1 $AB = 7$ см, $BC = 24$ см, $AC = 25$ см	**А** гострокутний нерівнобедрений трикутник
2 $AB = 14$ см, $BC = 15$ см, $AC = 16$ см	**Б** тупокутний рівнобедрений трикутник
3 $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $AC = 24$ см	**В** прямокутний трикутник
	Г тупокутний нерівнобедрений трикутник
	Д рівносторонній трикутник

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

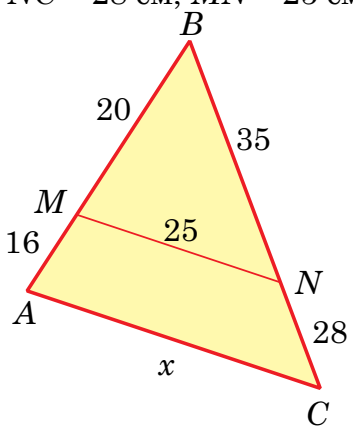
12. Установіть відповідність між елементами подібних трикутників (1–3) та довжиною (А–Д) невідомої сторони трикутника.

Елементи подібних трикутників

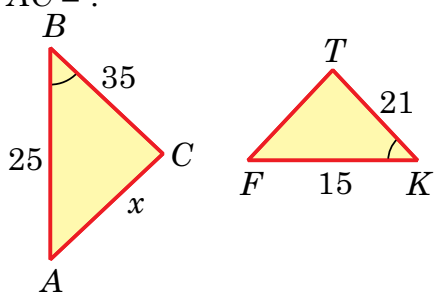
1 $FO = 6$ см, $EO = 12$ см, $OB = 6$ см, $AB = 5$ см, $\angle F = \angle A$, $FE = ?$



2 $AM = 16$ см, $MB = 20$ см, $BN = 35$ см, $NC = 28$ см, $MN = 25$ см, $AC = ?$



3 $\angle B = \angle K$, $BC = 35$ см, $AB = 25$ см, $TK = 21$ см, $FK = 15$ см, $AC - FT = 10$ см, $AC = ?$



Довжина сторони трикутника

А 25 см
Б 15 см
В 10 см
Г 35 см
Д 45 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

13. Сторони трикутника, одна з яких удвічі більша за другу, утворюють кут 120°, а довжина третьої сторони дорівнює $3\sqrt{7}$ см. Знайдіть довжину найменшої сторони трикутника.

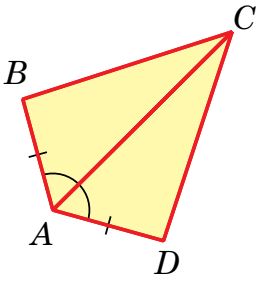
Відповідь.

14. Знайдіть різницю довжин радіусів описаного і вписаного кіл трикутника зі сторонами 25 см, 29 см 36 см.

Відповідь.

Варіант 2

1. На рисунку $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC = 45°$, $\angle ABC = 115°$. Знайдіть $\angle ADC$.



А	Б	В	Г	Д
60°	65°	105°	115°	120°

2. Внутрішні кути трикутника ABC відносяться, як 2 : 3 : 5. Визначте вид трикутника.

А	Б	В	Г	Д
рівносторонній	прямокутний	тупокутний	гострокутний	рівнобедрений

3. З'ясуйте, з яких трійок відрізків можна побудувати трикутник.

А	Б	В	Г	Д
2 см, 5 см, 8 см	4 см, 10 см, 6 см	6 см, 9 см, 12 см	10 см, 5 см, 4 см	1 см, 2 см, 3 см

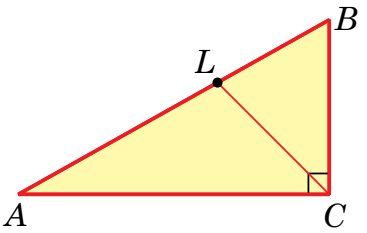
4. Знайдіть довжину гіпотенузи рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його катет дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
10 см	25 см	$5\sqrt{2}$ см	$2\sqrt{5}$ см	$\sqrt{10}$ см

5. Відстані від точки перетину медіан трикутника до його вершин дорівнюють 26 см, 14 см, 18 см. Знайдіть довжину найбільшої медіани трикутника.

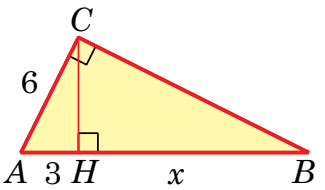
А	Б	В	Г	Д
32 см	33 см	36 см	39 см	42 см

6. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90°)$ проведено бісектрису CL (див. рисунок). Відомо, що AL = 5 см, BL = 2 см. Знайдіть $\operatorname{tg}\angle A$.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$

7. У прямокутному трикутнику ACB AC = 6 см, AH = 3 см, $CH \perp AB$ (див. рисунок). Знайдіть HB.

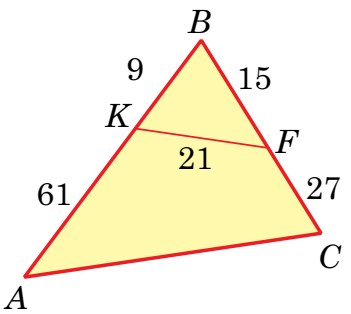


А	Б	В	Г	Д
3 см	6 см	$3\sqrt{3}$ см	9 см	12 см

8. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C$ = 135°. Знайдіть діаметр кола, описаного навколо трикутника.

А	Б	В	Г	Д
2 см	4 см	8 см	16 см	32 см

9. Знайдіть довжину відрізка AC (див. рисунок).



А	Б	В	Г	Д
63 см	37,8 см	98 см	147 см	інша відповідь

10. У трикутнику ABC проведено дві висоти AP та BK. Знайдіть довжину сторони AC, якщо BC = 6 см, AP = 2 см, BK = 3 см.

А	Б	В	Г	Д
4 см	8 см	2 см	5 см	інша відповідь

11. Установіть відповідність сторонами трикутника ABC (1–3) і твердженням (А–Д) про вид трикутника.

Сторони трикутника

1 $AB = 7$ см, $BC = 24$ см, $AC = 25$ см

2 $AB = 14$ см, $BC = 15$ см, $AC = 16$ см

3 $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $AC = 24$ см

Вид трикутника

А гострокутний нерівнобедрений трикутник

Б тупокутний рівнобедрений трикутник

В прямокутний трикутник

Г тупокутний нерівнобедрений трикутник

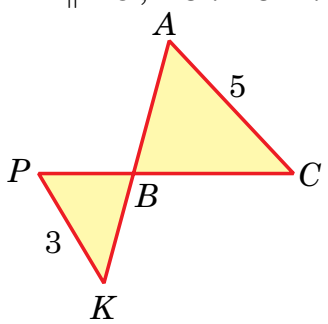
Д рівносторонній трикутник

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

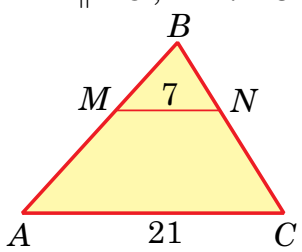
12. Установіть відповідність між трикутником (1–3) та відношенням відрізків (А–Д) трикутника.

Трикутник

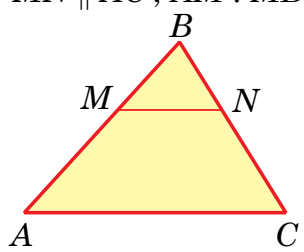
1 $KP \parallel AC$, $PC : BC = ?$



2 $MN \parallel AC$, $BN : BC = ?$



3 $MN \parallel AC$, $AM : MB = 3 : 2$, $AC : MN = ?$



Відношення відрізків

А 1 : 3

Б 1 : 2

В 8 : 5

Г 5 : 3

Д 5 : 2

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

13. Кут між двома сторонами трикутника, одна з яких на 10 см більша за другу, дорівнює 60°, а третя сторона дорівнює 14 см. Яка довжина найбільшої сторони трикутника?

Відповідь.

14. Знайдіть суму радіусів вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами 25 см, 33 см і 52 см.

Відповідь.

Відповіді до тестових завдань

Варіант 1

1. Б.
2. Г.
3. Г.
4. В.
5. Г.
6. А.
7. Г.
8. Б.
9. Г.
10. В.
11. 1 – В, 2 – А, 3 – Г.
12. 1 – В, 2 – Д, 3 – А.
13. 3 см.
14. 10,125 см.

Варіант 2

1. Г.
2. Б.
3. В.
4. В.
5. Г.
6. Д.
7. Г.
8. В.
9. В.
10. А.
11. 1 – В, 2 – А, 3 – Г.
12. 1 – В, 2 – А, 3 – Д.
13. 16 см.
14. 38,5 см.

Таблиця оцінювання

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Бали	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

№ завдання	11	12	13	14	**Сума**
Бали	3	3	2	2	**20**

1) Коефіцієнт оцінювання: $\frac{12}{20} = 0{,}6$.

2) Коефіцієнт оцінювання 0,6 множимо на кількість набраних балів і отримаємо оцінку. Наприклад, учень/учениця набрав/набрала 18 тестових балів за результатами тестування. Тоді, оцінка: $18 \cdot 0{,}6 = 11$ (балів).

VI. Рефлексія (2–3 хв)

1. Я знаю, які існують види трикутників за сторонами і кутами.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я вмію перевірити, чи можуть три відрізки утворити трикутник.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я можу назвати і показати елементи трикутника: вершини, сторони, кути.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я вмію розрізняти медіани, бісектриси та висоти трикутника.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я розумію, як застосовується теорема Піфагора.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я знаю, що таке синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

7. Я вмію використовувати тригонометричні функції для знаходження сторін і кутів у прямокутному трикутнику.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

8. Я можу застосувати теорему косинусів та теорему синусів для розв'язування довільного трикутника.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

9. Я знаю властивості рівнобедреного та рівностороннього трикутників.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

10. Я знаю формули для обчислення площ трикутників.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми учнівських проєктів

1. Геометрія трикутника навколо нас.
2. Трикутник і мистецтво.
3. Практичний зміст застосування властивостей прямокутного трикутника.
4. Побудова особливих точок трикутника (інцентра, ортоцентра та центра мас).
5. Подібні трикутники: дослідження і застосування.

Список використаної літератури

1) Клочко І. Я. Математика. Геометрія ЗНО. Завдання рівня стандарту: Комплексне видання для підготовки до ДПА у форматі ЗНО. Ч.ІІ. / І. Я. Клочко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2024.
2) Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2024.
3) Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – 2-ге видання, переробл. – Х. : Гімназія, 2021.
4) Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017.
5) Щоденник абітурієнта. Математика з ЩА. URL: https://t.me/abitmath.