

Тема 7.

Системи лінійних та нелінійних рівнянь

Урок 1. Означення лінійного рівняння з двома невідомими. Системи лінійних рівнянь із двома невідомими

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

сформулюєте означення лінійних рівнянь із двома невідомими;

навчитесь наводити приклади лінійних рівнянь із двома невідомими та систем лінійних рівнянь;

вивчите взаємне розташування двох прямих на площині, яке визначає система лінійних рівнянь;

зможете підбирати пари чисел, які є розв'язками лінійних рівнянь із двома невідомими та систем лінійних рівнянь;

навчитесь складати системи лінійних рівнянь, що є математичними моделями текстових задач;

навчитесь розв'язувати практично зорієнтовані задачі з теми.

II. Повторення

1. Якщо $m = n - 1$, то $7 - m = \dots$ (ЗНО, 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
$n - 8$	$6 - n$	$8 - n$	$n - 6$	$n + 6$

2. Укажіть рівняння, коренем якого є число 2. (ЗНО, 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{x-2} = 0$	$x^2 + 4 = 0$	$5x + 12 = 2$	$x + 2 = x$	$\frac{3x-6}{x} = 0$

3. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-3}{3} = \frac{x+1}{6}$. (ЗНО, 2013 р.).

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$

4. Якщо $x + 2y - 6z = -1$ і $-y + 3z = 5$, то $x = \dots$ (ЗНО, 2013 р.).

А	Б	В	Г	Д
9	11	4	-9	-11

5. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\frac{3x-2}{x+1} = 7$. (ЗНО, 2017 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2]$	$(-2; 0]$	$(0; 2]$	$(2; 4]$	$[4; +\infty)$

III. Означення лінійного рівняння з двома невідомими

Рівняння з двома невідомими

Лінійні рівняння

$$\begin{aligned} ax + by &= c, \\ 3x + 6y &= 18, \\ 0 \cdot x - 3y + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Інші рівняння

$$\begin{aligned} xy &= 5, \\ x^2 + y^2 &= 16, \\ y^3 &= x^3 + 2x \end{aligned}$$

Означення. Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b, c — деякі числа, називають **лінійним рівнянням із двома невідомими**.

Розв'язати лінійне рівняння з двома невідомими — це означає, що потрібно знайти усі пари чисел x та y , які перетворюють рівняння у правильну рівність.

Розв'язком рівняння з двома змінними є пара чисел, при підстановці яких у рівняння отримаємо правильну рівність.

Наприклад, пара чисел $(1; 1)$ є розв'язком рівняння $5x + 3y = 8$, оскільки $5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$.

Зауваження. Розв'язок рівняння з двома невідомими записують як пару чисел. На першому місці в дужках записують значення змінної x , а на другому — значення змінної y (у лексикографічному порядку, тобто за алфавітом).

Наявність розв'язків у рівняннях із двома невідомими

1. **Рівняння з двома невідомими має безліч розв'язків.**

Наприклад.

1) Лінійне рівняння $5x + 3y = 8$ має безліч пар розв'язків, наприклад, пари чисел $(1; 1)$, $(1,6; 0)$ є розв'язками рівняння.

2) Рівняння $x^2 + y^2 = 9$ є рівнянням кола, з центром у точці $(0; 0)$ і з радіусом 3. Координати будь-якої точки, що лежить на даному колі, є розв'язком рівняння.

2. Рівняння з двома невідомими має один розв'язок.

Наприклад, рівняння $x^2 + y^4 = 0$ має лише один розв'язок $(0; 0)$, оскільки $x^2 \geq 0$, $y^4 \geq 0$, тому $x = y = 0$.

3. Рівняння з двома змінними не має розв'язків.

Наприклад, рівняння $x^4 + y^4 = -6$ не має розв'язків, оскільки сума невід'ємних чисел не може дорівнювати від'ємному числу.

Приклад 1. Виразіть змінну y через змінну x у рівнянні $4x + 6y = -10$. Знайдіть один із розв'язків рівняння.

Розв'язання.

1) Виразимо y через x : $4x + 6y = -10$, $6y = -10 - 4x$, $y = \frac{-10 - 4x}{6} = \frac{2(-5 - 2x)}{6}$,

$$y = \frac{-5 - 2x}{3} = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x.$$

2) Нехай $x = 3$, тоді $y = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3 = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}$.

Відповідь. 1) $y = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$; 2) $\left(3; -3\frac{2}{3}\right)$.

IV. Лінійні рівняння з двома невідомими. Графічна ілюстрація

У загальному випадку лінійне рівняння з двома невідомими має безліч пар розв'язків. Пари розв'язків рівняння визначають координати точок, що належать прямій лінії, яка є графіком лінійного рівняння з двома невідомими.

Розглянемо розташування прямої лінії на координатній площині залежно від значень параметрів (чисел) a , b і c .

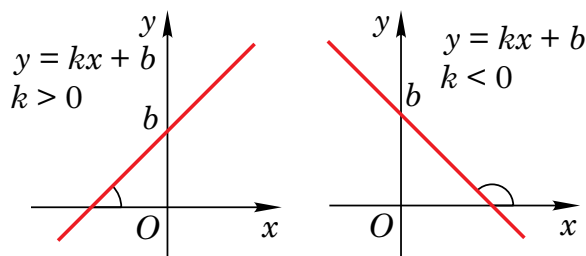
1) Якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, то пряма лінія перетинатиме координатні осі (x — вісь абсцис та y — вісь ординат) під гострим або тупим кутом із додатним напрямком осі Ox .

Із рівняння $ax + by = c$ матимемо:

$$by = -ax + c, \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Число $-\frac{a}{b}$ позначають $k = -\frac{a}{b}$ і називають **кутовим коефіцієнтом**.

Якщо $k > 0$, то кут між прямою та додатним напрямком осі Ox — гострий. Якщо $k < 0$, то кут між прямою та додатним напрямком осі Ox — тупий.



2) Якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$, то пряма лінія перетинатиме координатні осі у точці $(0; 0)$ під гострим або тупим кутом із додатним напрямком осі Ox (аналогічно попередньому пункту).

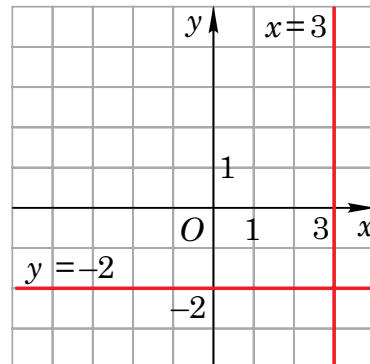
3) Якщо $a = 0$, то $y = \frac{c}{b}$ — пряма лінія, яка паралельна осі Ox , і проходить через

точку $y = \frac{c}{b}$.

4) Якщо $b = 0$, то $x = \frac{c}{a}$ — пряма лінія, яка паралельна

осі Oy , і проходить через точку $x = \frac{c}{a}$.

Приклад 2. Побудуємо графіки рівнянь: $y = -2$ і $x = 3$ (див. рисунок).



V. Системи лінійних рівнянь із двома невідомими

Примітка. Щоб знайти спільний розв'язок кількох рівнянь, то потрібно розв'язати систему рівнянь. Розв'язком системи рівнянь із двома невідомими називають пару значень невідомих, яка перетворює рівняння системи у правильну рівність.

Приклад 3. Розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ є пара чисел $(1; 1)$, тому що при

підстановці цих чисел $x = 1$, $y = 1$ у перше та друге рівняння системи отримаємо правильні рівності: $2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 6$ та $5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 1$.

Отже, пара чисел $(1; 1)$ — розв'язок заданої системи рівнянь.

VI. Взаємне розташування двох прямих на площині

Взаємне розташування двох прямих на площині задає система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Розглянемо розташування двох прямих, заданих лінійними рівняннями з двома невідомими на координатній площині.

1) Прямі, що є графіками рівнянь, перетинаються в одній точці. Тоді система матиме єдиний розв'язок, тобто координати точки перетину прямих: $(x_0; y_0)$.

При цьому виконується співвідношення: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

2) Прямі, що є графіками рівнянь, паралельні. Тоді система не матиме розв'язків.

При цьому виконується співвідношення: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

3) Прямі, що є графіками рівнянь, збігаються. Тоді система матиме безліч розв'язків.

При цьому виконується співвідношення: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Приклад 4. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 2? \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо відношення параметрів: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{4}$.

Оскільки $\frac{2}{3} \neq -\frac{3}{4}$, то система має єдиний розв'язок.

Відповідь. Один розв'язок.

VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У супермаркеті використовують візки двох різновидів. Меншим візком можна перевезти 6 кг вантажу, а більшим – 12 кг вантажу.

1. Складіть рівняння, за допомогою якого можна визначити кількість менших та більших візків, потрібних, щоб транспортувати 600 кг вантажу.
2. Визначте, скільки потрібно більших візків, якщо в магазині, на момент транспортування вантажу, є лише 50 вільних менших візків.
3. Якщо для перевезення вантажу в супермаркеті залишилося лише 30 більших візків, то скільки знадобиться менших візків?
4. З'ясуйте, чи можна перевезти 600 кг вантажу, якщо в супермаркеті залишилися вільними 40 менших візків і 30 більших візків?

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. (Усно). Укажіть рівняння з двома невідомими:

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| 1) $6x + 3 = 2y + 5$; | 2) $7x + y^2 = 99$; |
| 3) $x^2 + 6x + 4 = 0$; | 4) $x + y = 0$; |
| 5) $x + y \geq 0$. | |

2. (Усно). Укажіть лінійні рівняння з двома невідомими:

- | | |
|----------------------|--------------------------------|
| 1) $x^2 + y^2 = 9$; | 2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$; |
| 3) $x + y = 4$; | 4) $x = 4y - 5$; |
| 5) $xy = 24$. | |

3. У саду садівника Яблуненка ростуть груші та яблуні. Разом 42 дерева. Відомо, що яблунь на 13 більше, ніж груш. Складіть за умовою задачі систему рівнянь. Підберіть пару чисел, яка є розв'язком системи.

4. Підберіть пару чисел, яка задовольняє рівняння:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| 1) $x + y = 3$; | 2) $x - y = 10$; |
| 3) $2x + 3y = 7$; | 4) $11x - 2y = 20$. |

5. У рівняннях 1) – 4) виразіть: а) y через x ; б) x через y :

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| 1) $x + y + 5 = 0$; | 2) $2x - y = 16$; |
| 3) $2,5(x - y) = 18$; | 4) $y - \frac{1}{3}x = 6y + x$. |

6. Чи є пара чисел $(-1; 2)$ розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 1, \\ (x - y)(x + y) = -3? \end{cases}$
7. Скільки розв'язків має система рівнянь:
- 1) $\begin{cases} x - 2y = -3, \\ 2x - 4y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = -3, \\ 2x - 4y = 3? \end{cases}$
8. Складіть рівняння з двома невідомими, розв'язком якого є пара чисел:
- 1) $(0; 0)$; 2) $(4; 5)$;
3) $(-1; 2)$; 4) $(0,5; 2,5)$.
9. Печиво розфасовано в пачки по 250 г та 400 г. Скільки пачок печива необхідно придбати, щоб загальна маса становила 4300 г? Складіть лінійне рівняння з двома невідомими. Підберіть кілька розв'язків рівняння.
10. Сума двох чисел дорівнює 110, а їхня різниця дорівнює 56. Складіть систему лінійних рівнянь, за допомогою якої можна знайти невідомі числа.
11. Сума двох натуральних чисел дорівнює 28, а одне з цих чисел утричі більше за інше. Складіть систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

Рівень В

1. Знайдіть натуральні числа x та y , які задовольняють рівняння:
- 1) $2x + y = 17$; 2) $x + 2y = 33$;
3) $3x + 4y = 19$; 4) $5x + 3y = 25$.
2. Знайдіть таке значення a , щоб рівняння $6x + 7y = 14$ мало розв'язок $(1; a)$; $(a; 5)$.
3. У рівняннях 1) – 4) виразіть: а) y через x ; б) x через y :
- 1) $0,5(x + y) + 3y = 16$; 2) $y - 5(x + 4y) - (x^2 - 6) = 0$;
3) $\frac{x}{y} = \frac{5}{6(x - y)}$; 4) $y + 4 = \frac{4}{x}$.
4. Із досліджень психологів відомо, що на так званий «рівень щастя» впливають два основні фактори: кількість часу, проведеного на свіжому повітрі, та кількість загального часу, проведеного з близькими людьми. Рівень щастя вимірюється в балах. Опитування проводили серед двох соціальних груп і отримали такі результати:
- 1) якщо провести 2 години на день на свіжому повітрі та 3 години з близькими людьми, то рівень щастя становитиме 25 балів;
2) якщо провести 4 години на свіжому повітрі та 2 години з близькими людьми, то рівень щастя становитиме 28 балів.
1. Складіть систему рівнянь, яка описує залежність рівня щастя від двох основних факторів.
2. Знайдіть, скільки годин потрібно провести на свіжому повітрі та з близькими людьми, щоб рівень щастя становив 30 балів.
5. На підприємстві використовують два джерела альтернативної енергії: сонячні батареї та вітрові турбіни. Сонячні батареї виробляють x кВт/год, а вітрові турбіни — y кВт/год. Разом за день сонячні батареї та вітрові турбіни виробляють 500 кВт/год. Відомо, що сонячні батареї виробляють удвічі більше електроенергії, ніж вітрові турбіни. Складіть систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

6. Відома французька математикиня Софі Жермен вивчала властивості простих чисел. Вона розв'язувала одну із задач про залежність між двома простими числами. Якщо подвоєне перше число додати до другого, то отримаємо 26. Якщо від другого числа відняти потроєне перше число, то отримаємо 19. Складіть систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

Примітка. Знайдіть інформацію про Софі Жермен. Поділіться з друзями фактами з її життя, які вас найбільше вразили.

7. Підберіть коефіцієнт a таким чином, щоб система не мала розв'язків:

$$1) \begin{cases} 3x - 4x = -6, \\ -6x - ay = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ -6x - ay = 7. \end{cases}$$

8. При яких значеннях параметра a система має безліч розв'язків:

$$1) \begin{cases} ax - 2y = -6, \\ 3x + 4y = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x + ay = 8? \end{cases}$$

9. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2 + 9y^2 = -6; \quad 2) (x - 5)^2 + y^2 = 0; \quad 3) x^2 + (y - 7)^2 = 0.$$

10. *Стародавня китайська задача.* 5 волів і 2 барани коштують одинадцять юанів, а 2 воли і 8 баранів – вісім юанів. Скільки баранів можна купити за гроші, одержані від продажу 5 волів? Складіть систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

11. Знайдіть корені квадратного рівняння за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$1) x^2 - 5x + 6 = 0; \quad 2) x^2 - 6x - 7 = 0; \\ 3) x^2 + 3x - 4 = 0; \quad 4) x^2 - 5x - 24 = 0.$$

Рівень С

1. Виразіть з рівняння змінну y через змінну x . Знайдіть два будь-які розв'язки рівняння:

$$1) 0,3(2x + y) + 0,36(x + 2y) = 15; \quad 2) \frac{x + y}{6} + \frac{x - y}{8} + 15 = 0; \\ 3) y - 4x = 2(2x - y).$$

2. Знайдіть число a , якщо:

$$1) \text{ пара чисел } (a; a) \text{ є розв'язком рівняння } 2y - 5y = -21; \\ 2) \text{ пара чисел } (a; -a) \text{ є розв'язком рівняння } 8x + 7y = 2.$$

3. Знайдіть усі пари натуральних чисел, які є розв'язками рівнянь:

$$1) 5x + 6y = 29; \quad 2) 2y - 3x = 13; \quad 3) 7x + 11y = 72.$$

4. Знайдіть числа a та b , якщо пара чисел $(3; 2)$ є розв'язком системи $\begin{cases} ax + 6y = 20, \\ 3x + by = 16. \end{cases}$

5. Подружки Софійка та Анастасія вивчають проблеми екології і дбають про довкілля. Тому Софійка придбала 3 екоторбинки та 5 багаторазових пляшок, оплативши 850 грн за покупку. Анастасія придбала 4 екоторбинки та 2 багаторазові пляшки такі ж, як її подружка, і заплатила 620 грн. Скільки коштує одна екоторбинка та одна багаторазова пляшка? Складіть систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

6. Напередодні святкування дня Незалежності України на швейному підприємстві виготовили державні прапори та національні рушники. Для виготовлення одного прапора потрібно 1,5 метра тканини, а для виготовлення одного рушника — 2 метри тканини. Загалом на підприємстві використали 500 метрів тканини для виготовлення 300 одиниць зазначеної продукції. Скільки прапорів і скільки рушників виготовили на підприємстві? Складіть систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.
7. Маємо два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 9 %, а другий — 30 % цинку. Скільки треба взяти кілограмів першого сплаву і скільки кілограмів другого, щоб отримати сплав із масою 300 кг, що містить 23 % цинку? Складіть математичну модель задачі.
8. Чи мають цілі розв'язки рівняння:
 1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $x^2 + 5y^2 = 37$; 3) $3y^2 + x^2 = 32$?
9. *Стародавня грецька задача.* Навантажені осел і мул повільно йдуть дорогою. Осел скаржиться на важку ношу, а мул йому відповідає: «Чому ти скаржишся? Коли б я взяв твій один мішок, то моя ноша стала б удвічі важча за твою. А коли б ти взяв мій мішок, то твоя ноша дорівнювала б моїй». Скільки мішків несли осел і мул? Складіть систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.
10. Знайдіть корені квадратного рівняння за теоремою, оберненою до теореми Вієта:
 1) $12x^2 + x - 1 = 0$; 2) $2x^2 + 0,8x - 1 = 0$;
 3) $2x^2 - 4x + 1 = 0$; 4) $4x^2 + 7x + 3 = 0$.
11. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} 16x + ay = 4, \\ ax + 9y - 3 = 0 \end{cases}$ не має розв'язків? Обчисліть добуток цих значень, якщо таких декілька.

Рефлексія

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-

Можливі теми для проєктів

1. Історія розвитку теорії лінійних рівнянь.
2. Лінійні діофантові рівняння.
3. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гаусса.
4. Приклади використання систем лінійних рівнянь у життєвих ситуаціях.
5. Використання графічних калькуляторів для розв'язування систем рівнянь.
6. Використання лінійних рівнянь із двома невідомими в соціології та в економіці.
7. Системи лінійних рівнянь із параметром.