
**Урок 3. Обернена пропорційність. Деякі випадки
степеневі функції: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$. Властивості
функцій****План уроку**

1. Основні властивості функцій: область визначення, множина значень, нулі функції, монотонність функції, знакосталість функції, парність та непарність функцій.
2. Обернена пропорційність.
3. Функція $y = x^2$.
4. Функція $y = x^3$.
5. Функція $y = \sqrt{x}$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє комплексні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1-1];

досліджує комплексну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1-1];

упорядковує інформацію математичного змісту [12 МАО 2.1.3-1];

представляє результати самостійної роботи та/або групової роботи у співпраці з іншими [12 МАО 2.4.1-1];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язування комплексних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови, використовуючи статистичні дані, зокрема економічного характеру [12 МАО 2.2.2-1];

визначає, яких даних недостатньо для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-2];

самостійно або у співпраці з іншими обирає математичну модель розв'язання проблемної ситуації з урахуванням різних умов, зокрема бажаної точності результату і ресурсів, необхідних для застосування цієї моделі, на засадах ощадливості та поміркованості [12 МАО 3.2.2-1];

визначає, аналізує та узагальнює зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу [12 МАО 4.1.1-1];

визначає можливості застосування відомих математичних фактів і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Повторіть основні поняття попереднього уроку, розв'яжіть кілька прикладів на повторення.
- 3) Сформулюйте практичні задачі (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) При поясненні матеріалу наводьте лаконічні означення та приклади. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 6) Обирайте ілюстративні приклади, яких запропоновано з надлишком, на свій розсуд.
- 7) В ілюстративних прикладах описано властивості функцій, заданих графічно й аналітично. Аналітичне задання функції зручне для формування в учнів/учениць навиків точних обчислень і теоретичного аналізу, а графічне — допомагає їм швидко зрозуміти загальну поведінку функції. Використовуйте обидва способи задання функцій.
- 8) Запропонуйте учням/ученицям переглянути відеоуроки як частину домашнього завдання.
- 9) Акцентуйте увагу учнів/учениць щодо важливості вивчення функцій у цілому й оберненої пропорційності зокрема, оскільки функція оберненої пропорційності описує багато процесів у повсякденному житті, природі, техніці та економіці тощо.
- 10) Обов'язково виділіть час на розв'язування задач практичного змісту та тренувальні вправи для формування практичних навиків і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.
- 11) Заохочуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми проєктів запропоновані. Захист індивідуальних або групових проєктів може бути альтернативою тематичних контрольних робіт.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи існує взаємозв'язок між швидкістю руху і часом, коли ви йдете з дому до школи?
- 2) Якщо друг допоможе вам прибрати в кімнаті, як це вплине на час прибирання?
- 3) Чому ніж з гострим лезом ріже легше, ніж тупий ніж?

4) Чи знали ви, що в архітектурі, фізиці та фінансах часто використовують квадратний корінь?

5) Як фізики та інженери використовують квадратичні функції?

6) Як квадратична функція допомагає аналізувати прибуток і витрати підприємства?

7) Що спільного між квадратним коренем і параболою?

8) Чи можете ви навести приклади, коли від зменшення однієї величини збільшується інша?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Виділіть квадрат двочлена: $x^2 + 8x + 16$.
Відповідь. $(x + 4)^2$.
2. Знайдіть найбільше значення виразу $-x^2 - 5$.
Відповідь. -5 .
3. Знайдіть найменше значення виразу $(x - 2)^2 + 3$.
Відповідь. 3 .
4. Порівняйте з нулем значення, яких може набувати вираз $2 + \sqrt{x}$.
Відповідь. $2 + \sqrt{x} > 0$.
5. Розв'яжіть нерівність $7 - 10x \geq 0$.
Відповідь. $x \in (-\infty; 0,7]$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Кухар кухонним ножом нарізає сир. Через тривалий час використання лезо ножа затупилося. Кухар вирішив заточити лезо ножа.

1. Як зміна товщини леза вплине на тиск, який створюється при нарізанні сиру, якщо кухар прикладатиме однакові зусилля як до заточки ножа, так і після його заточки? Обґрунтуйте відповідь на основі властивостей функції.
2. Чому буде легше нарізати сир після заточування ножа?
3. Як треба змінити товщину леза ножа, щоб тиск на сир збільшився втричі?

III. Властивості функцій (5–7 хв)

Відеоуроки з теми: «Функція. Види функцій. Властивості функцій»

1. Функція виду $y = \frac{k}{x}$.



<https://vm.tiktok.com/ZMhTaYrcu/>

2. Функція виду $y = x^2$.

<https://vm.tiktok.com/ZMhTaykpx/> _____



3. Функція виду $y = x^3$.

<https://vm.tiktok.com/ZMhTaLqRQ/> _____



4. Функція виду $y = \sqrt{x}$.

<https://vm.tiktok.com/ZMhTaeQ8r/> _____



Відеоуроки: «Область визначення функції»

<https://vm.tiktok.com/ZMhc7A66q/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhc7Ph7B/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhc7kqyA/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhc72KY5/> _____



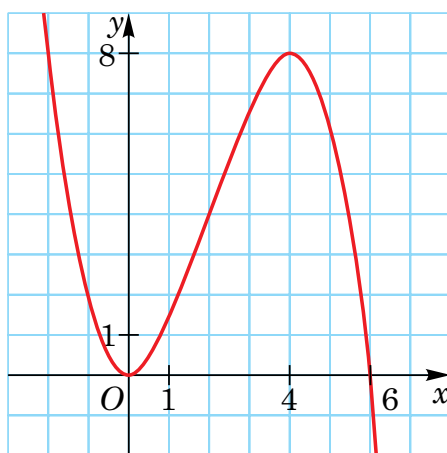
Основні властивості функцій та їхня графічна ілюстрація наведені в поданій нижче таблиці.

№ п/п	Аналітичні властивості функції	Графічна ілюстрація властивостей функції
1	Область визначення, тобто множина значень аргументу, при яких задана функція	Проекція графіка на вісь Ox
2	Нулі функції – точки, в яких функція перетворюється в 0, або корені рівняння $f(x) = 0$	Точки перетину графіка з віссю Ox
3	Проміжки сталого знака, тобто проміжки, на яких функція додатна (від'ємна), або інакше розв'язки нерівності $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)	Проміжки осі Ox , що відповідають точкам графіка, які лежать вище (нижче) осі Ox
4	Парність або непарність функції, тобто виконання рівності $f(-x) = f(x)$ для парної функції та виконання рівності $f(-x) = -f(x)$ для непарної функції	Графік парної функції симетричний відносно осі Oy ; графік непарної функції симетричний відносно початку координат

№ п/п	Аналітичні властивості функції	Графічна ілюстрація властивостей функції
5	Періодичність функції — існування такого числа T , що $f(x + T) = f(x)$	Графік періодичної функції повторюється по осі Ox через число T , яке називається періодом функції
6	Проміжки монотонності, тобто проміжки, на яких функція зростає або спадає	Проміжки осі Ox , на яких графік прямує вгору або вниз
7	Область значень функції — множина чисел, які складаються з усіх значень функції	Проекція графіка на вісь Oy

Ілюстративний приклад

6. За графіком функції $y = f(x)$ (див. рисунок) проаналізуйте властивості цієї функції.



Розв'язання.

	Перелік властивостей функції	Властивості функції $y = f(x)$
1.	Область визначення функції.	$D(y) : x \in R$.
2.	Нулі функції.	$x = 0, x = 6$.
3.	Область значень функції.	$E(y) : y \in R$.
4.	Проміжки знакосталості функції.	$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$. $f(x) < 0$ при $x \in (6; +\infty)$.
5.	Проміжки монотонності функції.	Функція зростає, якщо $x \in [0; 4]$. Функція спадає, якщо $x \in (-\infty; 0]$ і $[4; +\infty)$.
6.	Парність/непарність функції.	Ні парна, ні непарна.

1. Область визначення функції

Означення. Областю визначення функції (ОВФ) називається множина значень незалежної змінної або проекція графіка на вісь Ox .

Область визначення функції відповідає області допустимих значень відповідного алгебричного виразу і позначається $D(y)$. Для того, щоб знайти ОВФ, потрібно розв'язати нерівність або систему нерівностей. Існують загальні правила складання нерівностей або систем нерівностей при знаходженні області визначення функцій.

Розглянемо деякі загальні правила складання нерівностей або їхніх систем при обчисленні ОВФ.

1. Якщо $y = P(x)$, де $P(x)$ — многочлен від однієї змінної x , то $D(y) = R$.
2. Якщо $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени від однієї змінної x , то $D(y) = R$, окрім коренів знаменника, тобто коренів рівняння $Q(x) = 0$.
3. Якщо $y = \sqrt{P(x)}$, де $P(x)$ — многочлен від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати нерівність $P(x) \geq 0$.
4. Якщо $y = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати нерівність $Q(x) > 0$.
5. Якщо $y = \sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати систему нерівностей:
$$\begin{cases} P(x) \geq 0, \\ Q(x) \geq 0. \end{cases}$$

Ілюстративні приклади

7. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{x-5}{\sqrt{3x-9}}$.
Розв'язання. Многочлен чисельника може набувати будь-яких значень. Підкореневий вираз знаменника має набувати лише додатних значень. Тобто: $3x - 9 > 0$, $3x > 9$, $x > 3$.
Отже, $x \in (3; +\infty)$.
Відповідь. $(3; +\infty)$.
8. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{2x-1} - \sqrt{6-3x}$.
Розв'язання. Обидва підкореневі вирази мають бути невід'ємними. Тому отримаємо систему лінійних нерівностей.
$$D(y): \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 6-3x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 2x \geq 1, \\ 3x \leq 6; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0,5, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Отже, $x \in [0,5; 2]$.
Відповідь. $[0,5; 2]$.

2. Нулі функції

Означення. Точки, в яких функція $y = f(x)$ перетворюється в 0, тобто корені рівняння $f(x) = 0$ називають **нулями функції**.

Якщо побудований графік функції, то нулі функції — точки перетину графіка з віссю Ox .

Наприклад, нулями квадратичної функції $y = x^2 - 5x + 6$ є корені квадратного тричлена $x^2 - 5x + 6 = 0$, тобто числа $x=2, x=3$. У цих точках парабола $y = x^2 - 5x + 6$ перетинає вісь Ox . Нулем лінійної функції $y = kx + b$ є число $x = -\frac{b}{k}$.

Ілюстративний приклад

9. Знайдіть нулі функції $y = x^3 - 3x^2$.

Розв'язання. Нулями функції є корені рівняння:

$$x^3 - 3x^2 = 0, x^2(x - 3) = 0, x = 0 \text{ або } x = 3.$$

Відповідь. 0; 3.

3. Монотонність функції

Монотонність функції — це здатність функції або весь час зростати на певному проміжку, або весь час спадати на деякому проміжку.

Означення. Функція називається *зростаючою на деякому проміжку*, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.

Означення. Функція називається *спадною на деякому проміжку*, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

Графік зростаючої функції прямує вгору, якщо рухатися по осі Ox у додатному напрямку.

Графік спадної функції прямує вниз, якщо рухатися по осі Ox у додатному напрямку.

Ілюстративний приклад

10. Функція $y = f(x)$ спадає на множині дійсних чисел. Укажіть правильну нерівність:

1) $f(2) > f(-2)$; 2) $f(2) < f(3)$; 3) $f(2) > f(1)$; 4) $f(-2) < f(0)$; 5) $f(2) > f(5)$.

Розв'язання. Оскільки $y = f(x)$ є спадною функцією, то більшому значенню аргументу 5 відповідає менше значення функції $f(5)$.

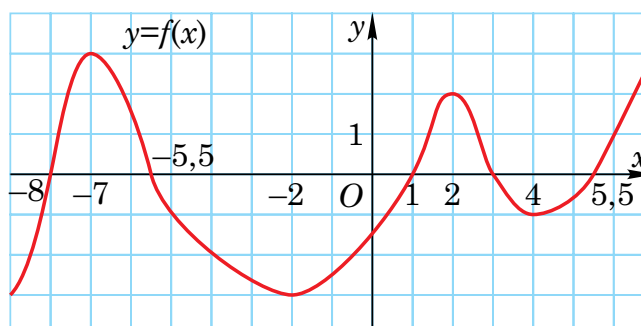
Відповідь. $f(2) > f(5)$.

4. Проміжки сталого знака функції

Означення. *Проміжками сталого знака функції*, або *знакосталості функції*, називають проміжки, на яких функція зберігає сталий знак, тобто це проміжки, на яких функція додатна (від'ємна), або інакше — розв'язки нерівності $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Ілюстративний приклад

11. Знайдіть проміжки знакосталості функції $y = f(x)$ (див. рисунок), визначеної на множині дійсних чисел.



Розв'язання. На інтервалах $(-8; -5,5)$, $(1; 3)$ і $(5,5; +\infty)$ графік функції лежить над віссю Ox , тобто функція набуває додатних значень (ординати точок графіка додатні). На інтервалах $(-\infty; -8)$, $(-5,5; 1)$ і $(3; 5,5)$ графік функції лежить нижче осі Ox , тобто функція набуває від'ємних значень (ординати точок графіка від'ємні).

Відповідь. На інтервалах $(-8; -5,5)$, $(1; 3)$ і $(5,5; +\infty)$ функція набуває додатних значень. На інтервалах $(-\infty; -8)$, $(-5,5; 1)$ і $(3; 5,5)$ функція набуває від'ємних значень.

5. Область значень функції

Означення. Областю (множиною) значень функції (ОЗФ) називається множина значень залежної змінної, або проекція графіка на вісь Oy .

Множину (або область) значень функції позначають $E(y)$. ОЗФ визначають за графіком функції або виконанням перетворень із формулою, що задає функцію. У загальному випадку обчислення ОЗФ — це розв'язання рівняння з параметром, де y є параметром.

Проте, у простіших випадках, можна знайти ОЗФ за схемою:

- 1) знаходимо область визначення функції;
- 2) знаходимо інтервали монотонності функції.

Якщо функція монотонно зростає на всій області визначення, то можна знайти найменше значення функції на її області визначення.

Якщо функція монотонно спадає на всій області визначення, то можна знайти найбільше значення функції на її області визначення.

Ілюстративні приклади

- 12.** Знайдіть множину значень функції $y = \sqrt{x^2 + 9} - 6$. (ЗНО, 2009 р.).

Розв'язання. Підкореневий вираз набуває лише додатних значень.

Функція зростає на всій області визначення. Якщо $x = 0$, то підкореневий вираз набуває найменшого значення: $y = \sqrt{0 + 9} - 6 = -3$.

Найбільшого значення функції не існує.

Отже, $E(y)$: $y \in [-3; +\infty)$.

Відповідь. $[-3; +\infty)$.

- 13.** Знайдіть множину значень функції $y = 1 - 3\sqrt{x}$.

Розв'язання. Функція $y = 1 - 3\sqrt{x}$ спадає.

Оскільки $D(y)$: $x \in [0; +\infty)$, то найменше значення аргументу функції $x = 0$.

При найменшому значенні аргументу функція набуває найбільшого значення.

Якщо $x = 0$, то $y = 1$. Отже, $E(y)$: $y \in (-\infty; 1]$.

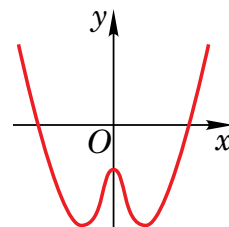
Відповідь. $y \in (-\infty; 1]$.

6*. Парність та непарність функції

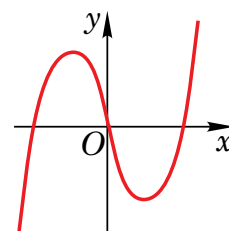
Означення. Функція називається *парною*, якщо виконується для всіх x із області її визначення рівність $f(-x) = f(x)$.

Означення. Функція називається *непарною*, якщо для всіх x із області її визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (див. рисунок).



Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (див. рисунок).



Для того, щоб перевірити функцію на парність, потрібно виконати пункти 1 – 5.

1. У формулі, що задає функцію, замінити x на $(-x)$. Важливо, щоб аргумент $(-x)$ був записаний у дужках.
2. Розкрити дужки, виконати спрощення.
3. Якщо в результаті спрощень отримаємо ту саму формулу, з якої ми розпочали, то функція парна.
4. Якщо — ні, то потрібно винести знак “мінус” перед формулою функції та перевірити умову $f(-x) = -f(x)$. Якщо ця умова виконується, то функція непарна.
5. Якщо ні перший, ні другий випадок не виконуються, то функція ні парна, ні непарна.

Ілюстративні приклади

14. Непарна функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел. Які з наведених тверджень правильні:
- 1) $f(-100) = -f(100)$;
 - 2) $f(-200) = f(200)$;
 - 3) графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно осі абсцис;
 - 4) графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно осі ординат;
 - 5) графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно початку координат?

Розв’язання.

Оскільки функція непарна, то правильними є твердження 1) і 5).

Відповідь. 1) і 5).

15. Дослідіть функцію $f(x) = 2x^3 - 3x$ на парність.

Розв’язання. Для цього знайдемо $f(-x)$:

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -(2x^3 - 3x).$$

Оскільки $f(-x) = -f(x)$, то функція непарна.

Відповідь. Функція непарна.

IV. Обернена пропорційність (3–5 хв)

Означення. Дві величини називають **обернено пропорційними**, якщо при збільшенні (зменшенні) однієї з них у кілька разів, інша зменшується (збільшується) у стільки ж разів.

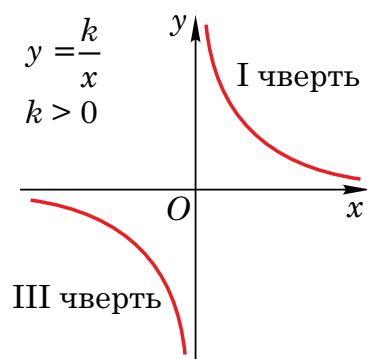
Обернену пропорційність задають формулою $y = \frac{k}{x}$, де y і x — змінні величини,

а k — стала величина (число).

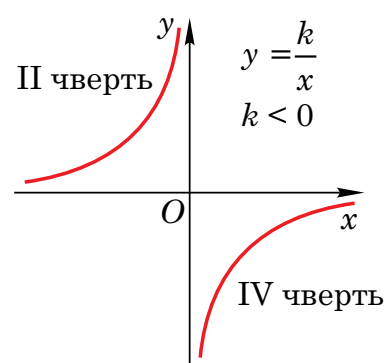
Графіком оберненої пропорційності є гіпербола.

Коефіцієнт k може «розповісти» про розташування гіперболи в координатних чвертях.

Якщо $k > 0$, гіпербола розташована в першій і третій координатних чвертях (див. рисунок).



Якщо $k < 0$, гіпербола розташована у другій і четвертій координатних чвертях (див. рисунок).



Властивості функції		Функція $y = \frac{k}{x}$	
		$k > 0$	$k < 0$
1.	Область визначення функції.	$D(y) : x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.	
2.	Нулі функції.	Не існують.	
3.	Область значень функції.	$E(y) : y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.	
4.	Проміжки знакосталості функції.	$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$; $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$.	$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$; $f(x) < 0$ при $x \in (0; +\infty)$.
5.	Проміжки монотонності функції.	Функція спадає, якщо $x \in (-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.	Функція зростає, якщо $x \in (-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.
6.	Парність/непарність функції.	Непарна.	

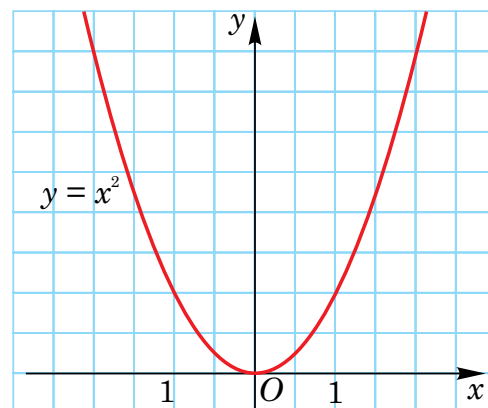
V. Функція $y = x^2$ (3–5 хв)

Розглянемо квадрат зі стороною x . Позначимо його площу через y , тоді $y = x^2$.

При $x = 2$, $y = 4$.

При $x = 3$, $y = 9$ тощо.

Зі зміною сторони квадрата відповідно змінюється його площа, при цьому кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y , а тому формула $y = x^2$ задає функцію, яку, за деяких умов, називають квадратичною або степеневою з парним натуральним показником степеня. Графік функції $y = x^2$ називають параболою (див. рисунок)



	Властивості функції	Функція $y = x^2$
1.	Область визначення функції.	$D(y) : x \in R$.
2.	Нулі функції.	$x = 0$.
3.	Область значень функції.	$E(y) : y \in [0; +\infty)$.
4.	Проміжки знакосталості функції.	$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
5.	Проміжки монотонності функції.	Функція зростає, якщо $x \in [0; +\infty)$. Функція спадає, якщо $x \in (-\infty; 0]$.
6.	Парність/непарність функції.	Парна.

VI. Функція $y = \sqrt{x}$ (3–5 хв)

Розглянемо квадрат зі стороною y . Позначимо його площу літерою x , тоді $x = y^2$, а залежність довжини сторони y квадрата від площі x виразимо формулою $y = \sqrt{x}$.

При $x = 4$, $y = 2$.

При $x = 9$, $y = 3$ тощо.

Зі зміною площі квадрата відповідно змінюється довжина його сторони, при цьому кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y , а тому формула $y = \sqrt{x}$ задає функцію. Графік цієї функції називають віткою параболи (див. рисунок).



	Властивості функції	Функція $y = \sqrt{x}$
1.	Область визначення функції.	$D(y) : x \in [0; +\infty)$.
2.	Нулі функції.	$x = 0$.
3.	Область значень функції.	$E(y) : y \in [0; +\infty)$.
4.	Проміжки знакосталості функції.	$f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$.
5.	Проміжки монотонності функції.	Функція зростає при $x \in [0; +\infty)$.
6.	Парність/непарність функції.	Ні парна, ні непарна.

Пізнавальна інформація.

Чи знаєте ви, що існує день квадратного кореня? Це неофіційне свято відзначається дев'ять разів у століття. У цей день як число, так і порядковий номер місяця є квадратними коренями з числа, утвореного двома останніми цифрами року. Наприклад, 3 березня 2009 року (03.03.2009). Нещодавно відзначали таке свято 5 травня 2025 року. До речі, квадратом були не лише дві останні цифри року, а й весь рік $2025 = 45^2$.

Ілюстративні приклади

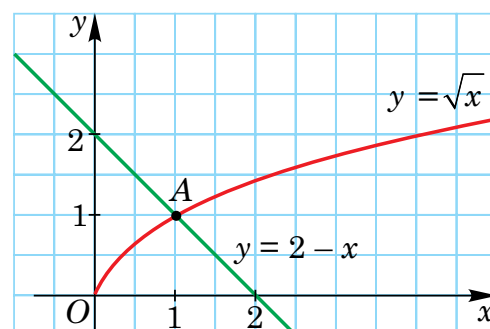
16. Розв'яжіть графічно рівняння $3 - \sqrt{x} = x + 1$.

Розв'язання. У рівнянні $3 - \sqrt{x} = x + 1$ зведемо подібні доданки, відокремимо квадратний корінь і отримаємо рівносильне рівняння $\sqrt{x} = 2 - x$, причому $x \geq 0$ і $x \leq 2$. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 2 - x$ (див. рисунок).

Графіки перетинаються в точці $A(1; 1)$.

Тому $x = 1$.

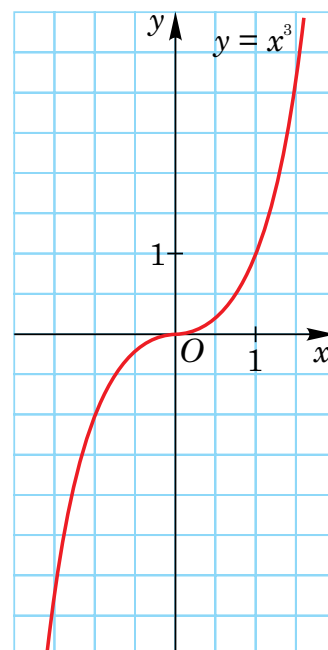
Відповідь. 1.



VII. Функція $y = x^3$ (3–5 хв)

Означення. Функцію виду $y = x^3$ називають **кубічною**.

Графік функції $y = x^3$ — кубічна парабола (див. рисунок).



	Властивості функції	Функція $y = x^3$
1.	Область визначення функції.	$D(y) : x \in R$.
2.	Нулі функції.	$x = 0$.
3.	Область значень функції.	$E(y) : y \in R$.
4.	Проміжки знакосталості функції.	$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$; $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$.
5.	Проміжки монотонності функції.	Функція зростає при $x \in R$.
6.	Парність/непарність функції.	Непарна.

VIII. Розв'язування практичних задач. Групова активність (5–8 хв)

Задача. Кухар кухонним ножом нарізає сир. Через тривалий час використання лезо ножа затупилося. Кухар вирішив заточити лезо ножа.

1. Як зміна товщини леза вплине на тиск, який створюється при нарізанні сиру, якщо кухар прикладатиме однакові зусилля як до заточки ножа, так і після його заточки? Обґрунтуйте відповідь на основі властивостей функції.
2. Чому буде легше нарізати сир після заточування ножа?
3. Як треба змінити товщину леза ножа, щоб тиск на сир збільшився втричі?

Розв'язання. 1) Використаємо формулу: $P = \frac{F}{S}$, де P — тиск ножа на сир, F — прикладена сила, S — площа леза. Якщо довжина леза L , а x — товщина леза, яка збільшується при користуванні ножом і зменшується при його заточуванні, то $S(x) = L \cdot x$. Тоді $P(x) = \frac{F}{L \cdot x}$ є функцією, яка задає обернено пропорційну залежність зміни тиску від зміни товщини леза.

2) Після заточування ножа товщина леза зменшиться, а тиск збільшиться без зміни прикладеної сили. Тому нарізати сир стане легше.

3) Щоб тиск на сир збільшився втричі, треба втричі зменшити товщину леза, оскільки маємо обернено пропорційну залежність.

Відповідь. 1) $P(x) = \frac{F}{L \cdot x}$. 2) Збільшиться тиск на сир. 3) Утричі зменшити товщину леза.

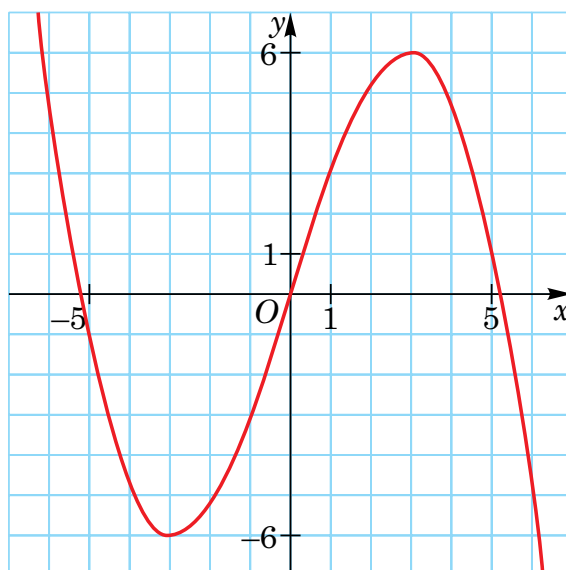
IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (10 хв)

Рівень А

1. Графік якої із функцій: 1) $y = \frac{4}{x}$, 2) $y = 3x + 1$, 3) $y = \frac{3}{x-2}$, 4) $y = x^2 - 1$, 5) $y = \frac{2x-1}{2}$ проходить через точку $(-1; -1)$?

А	Б	В	Г	Д
1)	2)	3)	4)	5)

2. На рисунку побудовано графік функції $y = f(x)$ (див. рисунок), визначеної на множині дійсних чисел. Укажіть інтервали, на яких функція набуває додатних значень.



А	Б	В	Г	Д
$(-3; 3)$	$(-5, 2; 0)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; -5, 2) \cup$ $\cup (0; 5, 2)$	$(-\infty; -3) \cup$ $\cup (3; +\infty)$

3. За рисунком (див. рисунок до завдання 2) знайдіть добуток усіх нулів функції.

А	Б	В	Г	Д
-9	-27,04	27,04	0	-25,4

4. За рисунком (див. рисунок до завдання 2) знайдіть проміжки спадання функції.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; 3]$	$[-5, 2; 0]$	$[3; +\infty)$	$[-6; 6]$	$(-\infty; -3] \cup$ $\cup [3; +\infty)$

5. Яка з функцій: 1) $y = x^2 + 1$, 2) $y = 1 - x^2$, 3) $y = \sqrt{x} - 1$, 4) $y = \frac{2}{x}$, 5) $y = \frac{x+2}{x+1}$ є не-парною?

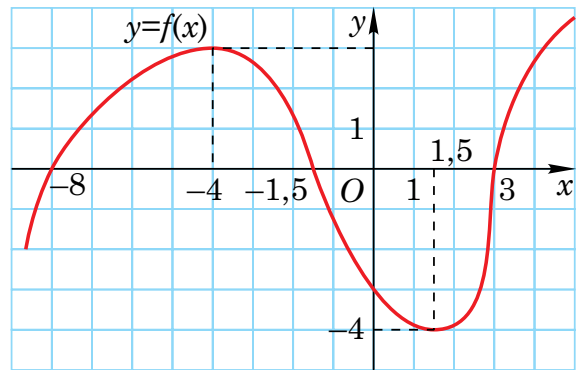
А	Б	В	Г	Д
1)	2)	3)	4)	5)

6. Знайдіть множину значень функції $y = \sqrt{x^2 + 9} - 6$ (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3]$	$(-\infty; -3]$	$[-3; +\infty)$	$[-6; +\infty)$	множина дійсних чисел

7. На рисунку побудовано графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел.

- 1) Укажіть інтервали, на яких функція набуває додатних значень
- 2) Знайдіть суму всіх нулів функції.
- 3) Знайдіть проміжки зростання та спадання функції.



8. Установіть відповідність між функцією (1–4) та значенням (А–Д) функції, якщо $x = -2$.

Функція

1 $y = \frac{-x+2}{2}$

2 $y = \sqrt{13-x^2}$

3 $y = \frac{2x}{x-2}$

4 $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$

Значення функції

А -2

Б 3

В -1

Г 2

Д 1

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

9. Ліхтарик світить на одному комплекті батарейок 15 годин при силі струму 0,2 А. Скільки годин ліхтарик світитиме, якщо зменшити силу струму до 0,1 А?
10. Вантаж масою 10 кг починає рух зі швидкості 0 м/с до деякої швидкості v м/с. Запишіть вираз для кінетичної енергії вантажу як функції швидкості. Визначте вид функції й опишіть її властивості.

Рівень В

1. Яка з функцій: 1) $y = x^2 - 4x + 4$, 2) $y = -\frac{4}{x}$, 3) $y = 3 - 4x$, 4) $y = \sqrt{x+3}$ зростає на інтервалі $[2; +\infty)$?

А	Б	В	Г	Д
1)	2)	3)	4)	жодна з перелічених

2. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її областю визначення (А–Д).

Функція

1 $y = \sqrt{3x-2}$

2 $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{5-x}$

3 $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-7}$

4 $y = \sqrt{1 - \frac{x}{x-1}}$

Область визначення функції

А $x \in (-\infty; 1)$

Б $x \in [-3; 7) \cup (7; +\infty)$

В $x \in [-2; 5]$

Г $x \in (1; +\infty)$

Д $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

3. У харчовальному раціоні однієї родини упродовж восьми днів споживається 12 кг картоплі. Скільки кілограмів картоплі потрібно, щоб за незмінних умов харчувати дві родини?

4. Серед функцій: 1) $y = \frac{2x}{x^2 - 4}$, 2) $y = \sqrt{x - 4}$, 3) $y = \frac{3x}{\sqrt{x - 4}}$, 4) $y = \sqrt{4 - x}$, 5) $y = \frac{4}{4 - x}$ укажіть таку, областю визначення якої є інтервал $(-\infty; 4]$.

А	Б	В	Г	Д
1)	2)	3)	4)	5)

5. Скільки різних функцій записано в ряду: $y = |x|$; $y = \frac{x^2}{|x|}$; $y = \sqrt{x^2}$; $y = (\sqrt{x})^2$; $y = \frac{x}{x}$?

А	Б	В	Г	Д
одна	дві	три	чотири	п'ять

6. Яка з наведених точок належить графіку функції $y = \frac{5 + x}{x - 2}$? (Пробне ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
(2; 7)	(1; 6)	(-3; 0,4)	(0; 2,5)	(4; 4,5)

7. Яка з наведених функцій є парною? (Пробне ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
$y = x^4 - 2x$	$y = x^4 - x^2 + 11$	$y = x^3 - x$	$y = x^4 - 2x^3 + 1$	$y = x^3 - 2x^2 + 1$

8. Знайдіть нулі функції $y = \frac{9x^2 - 6x + 1}{3x - 1}$.

9. Потенціальна енергія $E_{\text{п}}$ стиснутої пружини визначається формулою: $E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}$, де $k = 100$ Н/м — жорсткість пружини, а x — відстань, на яку стиснули пружину. Знайдіть енергію пружини, якщо її стиснули на 10 см.

10. Автомобіль рухається з початковою швидкістю v_0 і гальмує з прискоренням a . Відстань, яку він проїде до повної зупинки, визначається формулою: $s(v) = \frac{v_0^2}{2a}$. Обчисліть шлях гальмування, якщо початкова швидкість дорівнює 20 м/с, а прискорення становить 5 м/с².

11. Енергія електричного поля плоского конденсатора: $W = \frac{CU^2}{2}$, де C — ємність конденсатора, U — напруга. Як зміниться енергія, якщо напругу збільшити вдвічі?

12. Параплан летить по траєкторії, яка описується рівнянням $h(t) = -2t^3 + 3t^2 + 4t$, де h (м) — висота перебування параплана над рівнем моря, t — час у хвиликах. Через скільки хвилин параплан приземлиться?

Рівень С

1. Установіть відповідність між функцією (1–4) та нулями (А–Д) функції.

Функція

1 $y = \sqrt{x+2} - x$

2 $y = x^3 - 3x^2 + x - 3$

3 $y = |x-2| - 1$

4 $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x+3}$

Нулі функції

А 5

Б 2

В 3

Г 1; 3

Д -1; 2

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2. Знайдіть область визначення функції:

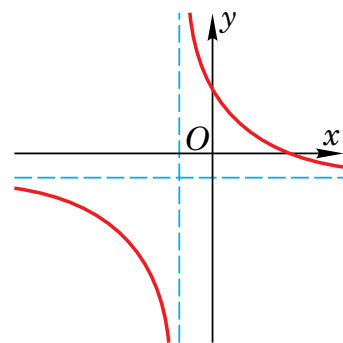
1) $y = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{2+x}} + \frac{3x-2}{x^2-7x+6}$;

2) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x-2}} - \frac{5}{x^2-3x}$.

3. Знайдіть інтервали, на яких функція $y = \frac{x^2+x-6}{x+3}$ набуває від'ємних значень.

4. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2+6x+9}{x+3} - \frac{x^2+5x}{x}$. Укажіть область визначення та множину значень функції.

5. За схематичним графіком функції $y = \frac{ax+b}{x+c}$ визначте знаки чисел a , b , c . (ЗНО, 2017 р.).



6. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її властивістю (А–Д).

Функція

1 $y = x^2$

2 $y = 3 - x$

3 $y = x^3 - 1$

4 $y = x^5 + 3x^3$

Властивість функції

А спадає на всій області визначення

Б областю значень функції є проміжок $(0; +\infty)$

В є парною

Г зростає на всій області визначення

Д є непарною

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

7. Знайдіть множину значень функції $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$.

8. Функцію $y = x^4 + 2x - 3$, яка визначена на множині дійсних чисел, подайте у вигляді $y = f(x) + g(x)$, де $f(x)$ — парна функція, $g(x)$ — непарна функція. У відповідь запишіть значення виразу $f(-1) - 4g(3)$. (ЗНО, 2010 р.).

9. Знайдіть множину значень функції: $y = 10 - \sqrt{-x^2 - 10x - 16}$.

10. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2-2x+1}}$. Укажіть множину значень функції та розв'язки нерівності $f(x) > 0$. (ЗНО, 2008 р.).

Х. Рефлексія (2–3 хв)

Уміння	так	швидше так, аніж ні	швидше ні, ніж так	ні
Я вмію знаходити область визначення функцій.				
Я вмію знаходити множину значень функцій.				
Я вмію знаходити нулі функцій.				
Я вмію знаходити проміжки знакосталості функцій.				
Я вмію знаходити проміжки монотонності функцій.				
Я можу розв'язувати задачі з теми.				

Можливі теми учнівських проєктів

1. Історія розвитку квадратичної функції: від античної математики до сучасного використання.
2. Квадратичні функції у фінансах: оптимізація прибутку, витрат.
3. Моделювання руху тіл у фізиці. Як квадратична функція описує закони вільного падіння, руху за параболічною траєкторією?
4. Чи можна знайти квадратний корінь без засобів обчислювальної техніки, чи то відповідних таблиць? Дослідження різноманітних методів обчислення.
5. Застосування квадратного кореня у фінансових розрахунках.
6. Обернена пропорційність та її практичне застосування.