

Урок 5. Означення степеня з раціональним показником. Властивості степенів із раціональними показниками

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

пояснювати, що таке степінь із раціональним показником;

навчитися обчислювати значення виразів, що містять степені з раціональними показниками;

навчитися застосовувати властивості степенів із раціональними показниками для спрощення виразів;

навчитися порівнювати числа, подані у вигляді степенів із раціональними показниками.

II. Повторення

1. Знайдіть область допустимих значень виразу $\sqrt[5]{x+3}$.
2. Обчисліть значення виразу $\frac{3}{4} \cdot \sqrt[5]{32}$.
3. Обчисліть: $\sqrt{2\frac{1}{4}}$.
4. Обчисліть: $\sqrt[6]{(-3)^6}$.
5. Спростіть вираз $(\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt[4]{a}-1)$.
6. Звільніться від ірраціональності в знаменнику $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

III. Означення степеня з раціональним показником

1. Степінь із цілим показником $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, якщо n — ціле від'ємне число.

2. $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$.

3. Якщо a — додатне число, m — ціле число, а n — натуральне число ($n > 1$), то степенем числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$ називається корінь n -го степеня з числа a^m .

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, де m — ціле число, n — натуральне, $n \geq 2$, $a > 0$.

Наприклад:

1) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$,

2) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, якщо $a > 0$,

3) $b^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{b}$, якщо $b > 0$,

4) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, якщо $x > 0$,

5) $\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$, якщо $x > 0$.

Примітка. Основа степеня $a^{\frac{m}{n}}$ (число a) має бути додатним числом, оскільки, в іншому випадку, можуть виникати математичні невизначеності.

Наприклад, $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$, що неможливо.

При виконанні дій зі степенями з раціональними показниками використовують формули скороченого множення:

1) $a - b = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$;

2) $a - b = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$;

3) $a + b = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

Приклад 1. Знайдіть значення виразу $27^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{3}{4}}$.

Розв'язання. $27^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16^3} = 3 + (\sqrt[4]{16})^3 = 3 + 2^3 = 11$.

Відповідь. 11.

Приклад 2. Спростіть дробовий вираз $\frac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$.

Розв'язання. Розкладемо чисельник на множники за формулою різниці квадратів:

$$\frac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}.$$

Відповідь. $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$.

IV. Доведення властивостей степенів із раціональними показниками

- 1. Добуток степенів з однаковою основою.** Нехай $a > 0$, а числа p і q — раціональні. Тоді: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Доведення. Нехай $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{s}$.

$$\text{Тоді } a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} \cdot a^{\frac{kn}{ns}}$$

За означенням степеня з раціональним показником:

$$a^{\frac{ms}{ns}} \cdot a^{\frac{kn}{ns}} = \sqrt[n]{a^{ms}} \cdot \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{a^{ms} \cdot a^{kn}} = \sqrt[n]{a^{ms+kn}} = a^{\frac{ms+kn}{ns}} = a^{\frac{ms}{ns} + \frac{kn}{ns}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{s}} = a^{p+q}.$$

Отже, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, де $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{s}$.

- 2. Частка степенів з однаковою основою.** Нехай $a > 0$, а числа p і q — раціональні.

$$\text{Тоді: } a^p : a^q = a^{p-q}, \text{ де } p = \frac{m}{n}, q = \frac{k}{s}.$$

- 3. Піднесення степеня до степеня.** Нехай $a > 0$, а числа p і q — раціональні. Тоді: $(a^p)^q = a^{pq}$.

Доведення. Нехай $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{s}$. За означенням, $(\sqrt[n]{a^m})^{\frac{k}{s}} = \sqrt[s]{(\sqrt[n]{a^m})^k}$.

Використаємо властивість: $(\sqrt[n]{x})^k = \sqrt[n]{x^k}$.

$$\sqrt[s]{(\sqrt[n]{a^m})^k} = \sqrt[s]{\sqrt[n]{(a^m)^k}} = \sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = a^{\frac{mk}{sn}} = a^{pq}.$$

Отже, $(a^p)^q = a^{pq}$.

- 4. Степінь добутку.** Якщо $a > 0$, $b > 0$ і число p — раціональне, то: $(ab)^p = a^p \cdot b^p$.

Доведення. Нехай $p = \frac{m}{n}$. Тоді $(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^p \cdot b^p$.

Отже, $(ab)^p = a^p \cdot b^p$.

- 5. Степінь частки.** Якщо $a > 0$, $b > 0$ і число p — раціональне, то: $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Доведення. Нехай $p = \frac{m}{n}$. Тоді $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^p}{b^p}$.

Отже, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Приклад 3. Спростіть вираз $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$.

Розв'язання. $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{6}}$.

Відповідь. $a^{\frac{13}{6}}$.

Приклад 4. Який показник степеня має вираз $\frac{x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}}$?

Розв'язання. $\frac{x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{3}{4}}$.

Відповідь. $\frac{3}{4}$.

V. Розв'язування практичної задачі

Задача. Лісовий масив має форму круга. Вчені-екологи спостерігають за збільшенням площі насаджень. Збільшення площі насаджень можна описати формулою $S_0 \cdot (1+k)^{\frac{t}{n}}$, де S_0 — початкова площа насаджень, k — щорічний відсоток приросту радіуса круга насаджень, n — коефіцієнт, що враховує нелінійність збільшення радіуса круга з часом. Обчисліть площу лісу через 3 роки, якщо $S_0 = 500$ га, а щорічний приріст радіуса круга становить в середньому 21%, тобто $k = 0,21$, коефіцієнт $n = 2$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Подайте числовий вираз у вигляді кореня:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------|
| 1) $64^{\frac{3}{2}}$; | 2) $18^{\frac{2}{3}}$; | 3) $100^{1,5}$; |
| 4) $6^{\frac{4}{5}}$; | 5) $12^{\frac{1}{2}}$; | 6) $7^{-2,75}$. |

2. Подайте числовий вираз у вигляді степеня з дробовим показником:

- | | | |
|----------------------|--------------------------------|---------------------------|
| 1) $\sqrt[3]{5^4}$; | 2) $\sqrt[6]{7}$; | 3) $\sqrt[15]{2^{119}}$; |
| 4) $\sqrt[8]{a^7}$; | 5) $\frac{1}{\sqrt[8]{a^7}}$; | 6) $\sqrt[4]{b^{-3}}$. |

3. Застосуйте властивості степенів та подайте вираз у вигляді степеня:

- | | | | |
|--|--------------------------------------|--|---|
| 1) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$; | 2) $3^{1,5} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$; | 3) $5 \cdot 5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{-2,5}$; | 4) $\frac{1}{7^3} \cdot 7^{\frac{1}{6}}$. |
| 5) $\frac{7^{\frac{3}{4}}}{7^{\frac{1}{4}}}$; | 6) $\frac{5^{1,5}}{5^{-3}}$; | 7) $\left(\frac{11^5}{11^{\frac{4}{5}}}\right)^{-1}$; | 8) $\left(\frac{1}{45}\right)^{-\frac{2}{3}}$. |

4. Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та його значенням (А–Д).
(Пробне ЗНО, 2015 р.).

Числовий вираз

- 1 $16^{\frac{1}{2}}$
2 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$
3 $(2^3)^2$
4 $2^{3,5} \cdot 2^{1,5}$

Значення числового виразу

- А 4
Б 8
В 16
Г 32
Д 64

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

5. За властивостями степенів, спростіть вираз:

1) $16^{-0,75} \cdot 8^{-\frac{5}{12}} \cdot 4^{\frac{5}{8}}$; 2) $\frac{\left(x^{\frac{5}{8}}\right)^4}{\sqrt[3]{x^4}}$.

6. Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:

1) $3a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - 2) + 6a^{\frac{1}{2}}$; 2) $(5a^{\frac{4}{3}} + 2b^{\frac{1}{2}})(5a^{\frac{4}{3}} - 2b^{\frac{1}{2}})$;
3) $(x^{0,5} - y^{0,5})^2$; 4) $(m^{\frac{1}{8}} - 4)(m^{\frac{1}{4}} - 2)(m^{\frac{1}{4}} + 2)$.

7. Обчисліть значення виразу $\frac{(3a^2b)^3}{ab^4} : \frac{(81b^2 \cdot a^{10})^{\frac{1}{2}}}{5ab}$, якщо $a = 2$, $b = 8$.

(ЗНО, 2011 р., додаткова сесія).

Рівень В

1. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{0,5} \cdot 3^{2,5} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $32^{0,6} - 0,125^{-\frac{2}{3}} + 0,008^{\frac{1}{3}}$;
3) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{49}\right)^{-0,5} \cdot 36^{\frac{3}{2}}$; 4) $\frac{100^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}}{1000^{\frac{1}{6}}}$.

2. Обчисліть:

1) $3^{2,5} \cdot 9^{-0,5} \cdot 27^{-\frac{1}{3}}$; 2) $5^{-0,8} : 5^{1,2} \cdot 125^{2,5}$;
3) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-0,75}$; 4) $\frac{64^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{2}}}$.

3. Скоротіть дробовий вираз:

1) $\frac{p-16}{p^{0,5}-4}$; 2) $\frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{x - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y}$;
3) $\frac{a^{2,5} - a^{0,5}}{a^{1,5} - a^{0,5}}$; 4) $\frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(-x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}$.

4. Скільки раціональних чисел записано в ряду: $\frac{\sqrt[3]{125}}{3}$, $\sqrt[6]{64}$, $\left(27^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$, $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$, $\sqrt{\sqrt{16}}$?

5. Розташуйте числа в порядку зростання: $a = (-1,2)^0$, $b = \sqrt[5]{-32}$, $c = 4^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-2}$, $d = (\sqrt[4]{16})^{-1}$.

6. Порівняйте числа:

1) $7^{\frac{1}{4}}$ та $3^{\frac{1}{2}}$;

2) $4^{-\frac{1}{3}}$ та $2^{-\frac{1}{2}}$.

7. Установіть відповідність між виразом (1–4) та показником степеня (А–Д) виразу.

Вираз

1 $a^{\frac{2}{3}} : \sqrt[5]{a^2}$

2 $\left(a^{\frac{7}{6}} a^{\frac{14}{27}}\right)^{\frac{3}{7}}$

3 $\frac{\sqrt[9]{a^8}}{\sqrt[6]{a^5}}$

4 $\sqrt[3]{a^5 \sqrt{a}} \cdot \sqrt[5]{a}$

Показник степеня виразу

А $\frac{1}{18}$

Б $\frac{4}{15}$

В $\frac{3}{5}$

Г $\frac{13}{18}$

Д $\frac{8}{15}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

8. Установіть відповідність між виразом (1–4) та виразом (А–Д), що йому тотожно дорівнює.

Вираз

1 $\sqrt[6]{a^{20} b^{19}}$, якщо $a < 0$

2 $\sqrt[6]{5ab} \cdot \sqrt[3]{a^2 b}$

3 $\frac{\sqrt[6]{a^3 b^2} \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ab}}$

4 $ab \cdot \sqrt[8]{\frac{1}{a^4 b^5}}$, якщо $a < 0$

Тотожно рівний вираз

А $-a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{8}}$

Б $\sqrt[18]{\frac{a}{b}}$

В $-a^3 b^3 \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{6}}\right)$

Г $a^{\frac{21}{30}} \cdot b^{\frac{11}{30}}$

Д $a^3 b^3 \cdot \sqrt[6]{a^2 b}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

9. У фармацевтичній лабораторії виготовляють ліки, де одну з речовин стерилізують нагріванням. При цьому маса речовини змінюється за формулою $m = m_0 \cdot t^{\frac{3}{4}}$, де m_0 — початкова маса речовини (у грамах), t — температура стерилізації (у градусах $^{\circ}\text{C}$). Визначте масу речовини після стерилізації при температурі 80°C , якщо початкова маса речовини становить 10 г.

10. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^{\frac{5}{8}}$;

2) $y = (x + 3)^{\frac{1}{6}}$;

3) $y = (2x - 5)^{-0,75}$;

4) $y = (x^2 - 4x + 4)^{\frac{1}{3}}$.

Рівень С

1. Подайте вираз у вигляді степеня:

$$1) (\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2})^{-6}; \quad 2) (\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[10]{a^3})^{20}; \quad 3) (m^{-1} \cdot \sqrt[4]{m^3})^{-4}; \quad 4) \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}} \right)^{-9}.$$

2. Обчисліть значення виразу:

$$1) \left(\frac{1}{4} \right)^{1,5} \cdot 8^{0,5} \cdot 16^{0,25}; \quad 2) \frac{27^{0,6} \cdot 9^{-0,5}}{3^{0,2}}; \quad 3) (4^{\frac{1}{4}})^{-2} \cdot 0,5^{-0,5}; \quad 4) \left(\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[6]{27}} \right)^{-3}.$$

3. Спростіть вираз:

$$1) (16x^4)^{\frac{3}{4}}; \quad 2) (64y^{-6})^{-\frac{1}{3}}; \quad 3) (0,09b^{-8})^{\frac{1}{2}}; \quad 4) (27c^{-12})^{-\frac{2}{3}}.$$

4. Спростіть вираз $(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} + (xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) - (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$ та знайдіть його значення, якщо $x = 8$, $y = 100$.

5. Спростіть вираз $\left(a^{-1} \cdot b^{\frac{5}{4}} \left(a^{3,5} \cdot b^{-\frac{1}{8}} \right)^2 \right)^{-1}$.

6. Побудуйте графік функції:

$$1) y = (x^{-\frac{1}{6}})^{12}; \quad 2) y = ((x-1)^2)^{\frac{1}{2}}; \quad 3) y = (x+2)^{-1}; \quad 4) y = ((x+3)^3)^{\frac{1}{3}}.$$

7. Обчисліть $64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1\frac{1}{2}} + 12^0 \cdot 4$.

8. Спростіть вираз $\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$.

9*. Обчисліть значення виразу $\frac{n^{\frac{4}{3}} - 27n^{\frac{1}{3}}m}{n^{\frac{2}{3}} + 3\sqrt[3]{mn}} : \left(1 - 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \right) - \sqrt[3]{n^2}$, якщо $n = 5$.

Рефлексія

Я ...

- вмію пояснити, що таке степінь з раціональним показником;
- можу сформулювати означення степеня з раціональним показником;
- вмію обчислювати значення виразів, що містять степені з раціональними, в тому числі з від'ємними, показниками;
- вмію застосовувати властивості степенів з раціональними показниками для спрощення виразів;
- вмію порівнювати числа, подані у вигляді степенів з раціональними показниками;
- відчуваю себе впевнено у розв'язанні завдань цієї теми.







