

Координати, вектори, геометричні перетворення на площині

Урок 2. Рівняння прямої

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

дізнаєтесь, що таке загальне рівняння прямої;

пригадаєте рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;

вивчите рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку;

вивчите формулу рівняння прямої, що проходить через дві задані точки;

навчитесь записувати рівняння прямої у відрізках;

навчитесь використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 12 см?
2. Обчисліть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 2 см, а кут між ними становить 30° .
3. Точка C — середина відрізка AB , де $A(-4; 3)$, $C(2; 1)$. Знайдіть координати точки B .
4. Коло задано рівнянням $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 8$. Як розташована точка $A(-2; 3)$ відносно кола?
5. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо $A(2; 1)$, $B(3; -5)$.

III. Загальне рівняння прямої

Означення 1. Рівняння виду $ax + by + c = 0$, де a, b, c — деякі числа, називається **лінійним рівнянням** з двома змінними.

Означення 2. Рівняння виду $ax + by + c = 0$, де a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$ або $b \neq 0$, називається **рівнянням першого степеня** з двома змінними.

Означення 3. Рівняння з двома змінними $ax + by + c = 0$, де a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$ або $b \neq 0$, називається **загальним рівнянням прямої**.

Графіком рівняння першого степеня з двома змінними $ax + by + c = 0$ є пряма, і навпаки, кожній прямій відповідає деяке лінійне рівняння $ax + by + c = 0$ з двома змінними, де a, b, c — деякі числа.

Окремі випадки лінійного рівняння

$a = 0, b \neq 0$	$y = -\frac{c}{b}$	Пряма, паралельна осі абсцис, — горизонтальна пряма.
$a \neq 0, b = 0$	$x = -\frac{c}{a}$	Пряма, паралельна осі ординат, — вертикальна пряма.
$c = 0, a \neq 0, b \neq 0$	$x = -\frac{a}{b}y$	Пряма, яка проходить через початок координат, — пряма пропорційності.

Історична довідка

Розділ геометрії, в якому властивості геометричних фігур установлюють засобами алгебри, тобто за допомогою методу координат, досліджують властивості рівнянь, які задають деякі фігури, називається *аналітичною геометрією*. Основні положення аналітичної геометрії вперше сформулював філософ і математик Рене Декарт у 1637 році. Готфрід Вільгельм Ляйбніц, Ісаак Ньютон і Леонард Ейлер надали аналітичній геометрії сучасної структури.

Приклад 1. Знайдіть координати точок перетину прямих $4x + 5y + 10 = 0$ і $x + 4y - 3 = 0$.

Розв'язання. Для того, щоб визначити координати точок перетину двох прямих, необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + 5y = -10, \\ x + 4y = 3; \end{cases}$$

$$x = 3 - 4y, \quad 4(3 - 4y) + 5y = -10, \quad 12 - 16y + 5y = -10, \quad -11y = -22, \quad y = 2.$$

$$\text{Тоді } x = 3 - 4 \cdot 2 = -5.$$

Отже, координати точки перетину двох даних прямих $(-5; 2)$

Відповідь. $(-5; 2)$.

IV. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (5–6 хв)

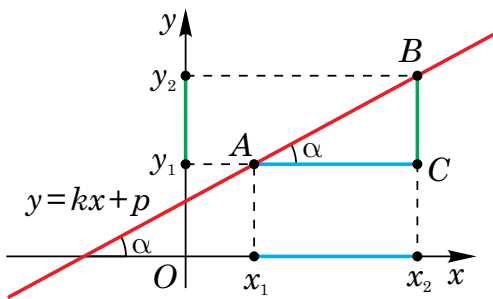
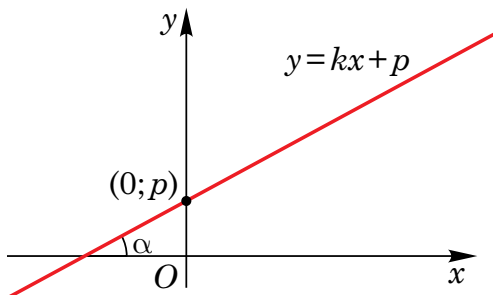
Загальне рівняння прямої $ax + by + c = 0$, при $b \neq 0$, можна подати у вигляді $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Уведемо позначення: $k = -\frac{a}{b}$, $p = -\frac{c}{b}$.

Означення. Рівняння $y = kx + p$ називається **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**.

Таким рівнянням неможливо задати вертикальну пряму.

Пряму із заданим кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$, можна задати рівнянням $y = k(x - x_0) + y_0$.

Геометричний зміст параметрів (чисел) рівняння прямої

Параметр (число)	Графічна ілюстрація	Геометричний зміст
k		Кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута між додатним напрямком осі абсцис та прямою, тобто $k = \operatorname{tg} \alpha$ (див. рисунок).
p		Число p — це ордината точки перетину прямої з віссю Oy .

Опорні твердження для розв'язування задач

1. Якщо кутові коефіцієнти двох різних прямих рівні, то ці прямі — паралельні.
2. Якщо добуток кутових коефіцієнтів двох прямих дорівнює (-1) , то ці прямі — перпендикулярні.

Приклад 2. Який кут утворює пряма $x - y = 4$ з додатним напрямком осі Ox ?

Розв'язання. $y = x - 4$.

Нехай α — шуканий кут, тоді $k = \operatorname{tg} \alpha = 1$, звідки $\alpha = 45^\circ$.

Відповідь. 45° .

V*. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма l проходить через дві точки: $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$. Складемо рівняння прямої l .

1) Якщо $x_1 = x_2 = m$, то рівняння прямої має вигляд: $x = m$.

2) Якщо $y_1 = y_2 = n$, то рівняння прямої має вигляд: $y = n$.

3) Якщо $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$, то рівняння прямої можна записати у вигляді: $y = kx + p$.

Тоді правильними будуть такі рівності: $y_1 = kx_1 + p$ та $y_2 = kx_2 + p$.

Віднімемо від другої рівності першу: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, звідки $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Використаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку: $y = k(x - x_0) + y_0$.

$$\text{Отримаємо: } y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \text{ або } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Означення. Рівняння $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ називають рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки з координатами $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$.

Приклад 3*. Складіть рівняння прямої, яка проходить через центри двох заданих кіл

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \text{ і } x^2 + y^2 - 10x - 6y = 2.$$

Розв'язання. Знайдемо координати центрів даних кіл:

1) $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 5$,

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$ — центр кола має координати $(2; -1)$.

2) $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 2 + 25 + 9$,

$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$ — центр кола має координати $(5; 3)$.

3) Скористаємось рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$\text{Отримаємо: } \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y + 1}{3 + 1}, \quad \frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{4},$$

$$4x - 8 = 3y + 3, \quad 4x - 3y - 11 = 0.$$

Відповідь. $4x - 3y - 11 = 0$.

VI*. Рівняння прямої у відрізках

Нехай деяка пряма перетинає осі координат у точках $(u; 0)$ та $(0; v)$.

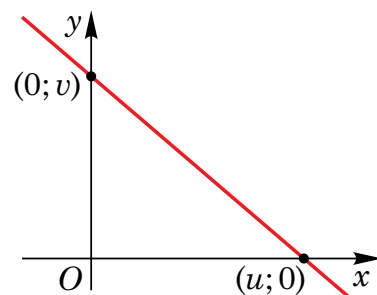
Запишемо рівняння прямої, що проходить через ці точки:

$$\frac{x - u}{0 - u} = \frac{y - 0}{v - 0}, \quad -\frac{x}{u} + 1 = \frac{y}{v}.$$

Звідси: $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$ — рівняння, яке називають **рівнянням**

прямої у відрізках.

Числа u та v показують, які відрізки відтинає пряма на осях координат.



Приклад 4. Дано пряму $2x - 3y = 6$. Запишіть рівняння цієї прямої у відрізках.

Розв'язання. Поділимо обидві частини даного рівняння на 6:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1.$$

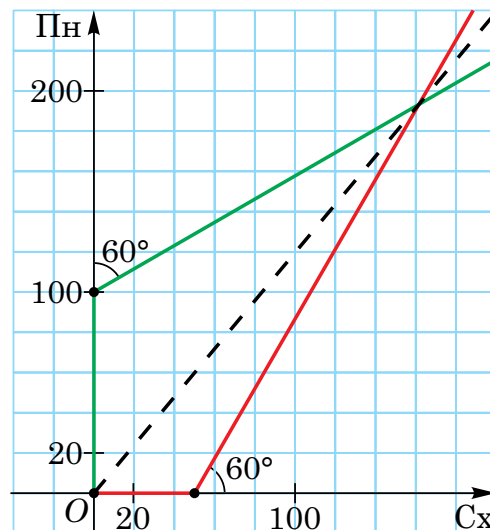
Відповідь. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1.$

VII. Розв'язування практичних задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Один із FPV-дронів злетів над точкою запуску на висоту 20 м, пролетів на схід 50 м, повернув проти годинникової стрілки на кут 60° і полетів далі по прямій, доки не зависнув над ціллю. Інший дрон, піднявшись на висоту 30 м, полетів на північ 100 м, потім повернув на кут 60° за годинниковою стрілкою і теж полетів далі по прямій, доки не дістався тієї ж цілі.

1. На якій відстані по прямій від точки запуску знаходиться ціль?
2. На який кут, відносно напрямку на схід, потрібно повернути за годинниковою стрілкою третьому дрону, щоб долетіти до цілі по прямій?



Примітка. Для наближених обчислень використовуйте: $\sqrt{3} \approx 1,73$. Використайте таблицю тангенсів або калькулятор.

Вказівка. Використайте рисунок.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Побудуйте прямі, які проходять через точку $A(5; -7)$ паралельно осям координат. Запишіть їхні рівняння.
2. Запишіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку:
1) $(5; 3)$; 2) $(2; -1)$; 3) $(-1; 3)$; 4) $(-4; -3)$.
3. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(5; -1)$ і має кутовий коефіцієнт, що дорівнює:
1) 2; 2) -3; 3) -0,5; 4) 1,5.
4. Дано пряму $3x - y + 5 = 0$ і точку $A(2; 1)$. Через точку A проведено пряму, паралельну даній, і пряму, перпендикулярну до даної. Складіть рівняння цих прямих.
5. Складіть рівняння прямих, що проходять через дві задані точки:
1) $(2; 3)$ та $(-1; 3)$; 2) $(-1; 2)$ та $(-1; -4)$; 3) $(2; 5)$ та $(1; 3)$; 4) $(-4; 5)$ та $(-5; 6)$.
6. Доведіть, що дві задані прямі — паралельні:
1) $3x + 5y - 4 = 0$ та $6x + 10y + 7 = 0$; 2) $2x - 4y + 3 = 0$ та $x - 2y = 0$.

7. Доведіть, що дві задані прямі $x + 5y - 35 = 0$ та $3x + 2y - 27 = 0$ перетинаються, та знайдіть точку їхнього перетину.
8. Знайдіть площу трикутника, який обмежують осі координат та пряма $3x - 4y - 12 = 0$.
9. Запишіть рівняння прямої $3x - 5y = 15$ у відрізках.
10. Дано пряму $2x - 3y - 12 = 0$. Запишіть рівняння цієї прямої з кутовим коефіцієнтом та знайдіть, у яких точках пряма перетинає координатні осі.

Рівень В

1. Знайдіть коефіцієнти a і b у рівнянні прямої $ax + by = 1$, якщо пряма проходить через точки $A(1; 2)$ і $B(2; 1)$.
2. Складіть рівняння прямої, яка проходить через центри двох заданих кіл
 $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ і $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 3$.
3. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4; -3)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:
 1) 30° ; 2) 60° ; 3) 120° ; 4) 150° .
4. Довжини діагоналей ромба дорівнюють 6 одиниць та 4 одиниці. Запишіть рівняння прямих, на яких лежать сторони ромба, якщо його більша діагональ належить осі абсцис, а менша — осі ординат.
5. Вершини трикутника мають координати $A(2; 6)$, $B(-6; 0)$, $C(-3; -4)$. Складіть рівняння прямих, що містять медіани даного трикутника.
6. Знайдіть y , якщо відомо, що точка $M(10; y)$ лежить на прямій AB , яка проходить через точки $A(2; 0)$ і $B(0; -3)$.
7. Пряма, задана рівнянням $y + 2x - 1 = 0$, перетинає вісь ординат у точці A . Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку A , перпендикулярно до заданої прямої.
8. Знайдіть відстань від початку координат до прямої, заданої рівнянням
 $12x - 5y - 26 = 0$.
9. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через дві задані точки:
 1) $(2; -5)$ та $(3; 2)$; 2) $(-3; 1)$ та $(7; 8)$;
 3) $(5; -3)$ та $(-1; 6)$; 4) $(6; -4)$ та $(-3; -2)$.
10. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; 3)$ та відтинає на осях координат рівні відрізки, якщо рахувати кожен відрізок від початку координат.

Рівень С

1. Доведіть, що прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
2. Знайдіть координати вершини C трикутника ABC і запишіть рівняння його сторін, якщо дано координати вершин $A(3; 4)$ і $B(-5; 6)$ і середину сторони BC — точку $M(-5; 3)$.
3. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом 3, яка відтинає на осі ординат відрізок завдовжки 4.

4. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої $x + 2y + 1 = 0$ та довжини відрізків, які ця пряма відтинає на осях координат.
5. Вершини трикутника мають координати $A(2; 6)$, $B(-6; 0)$, $C(-3; -4)$. Складіть рівняння прямих, що містять висоти даного трикутника.
6. Дано рівняння прямих, що містять дві сторони прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ та одну з його вершин $A(2; -3)$. Складіть рівняння прямих, що містять дві інші сторони цього прямокутника.
7. Дано рівняння прямих, що містять дві сторони прямокутника $x - y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$, та рівняння прямої, що містить одну з його діагоналей. Знайдіть координати вершин цього прямокутника.
8. Знайдіть значення параметра a , при якому пряма $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$:
 1) паралельна осі абсцис;
 2) паралельна осі ординат;
 3) проходить через початок координат.
9. Знайдіть значення параметрів m та n , при яких прямі $mx + 8y + n = 0$ і $2x + my - 1 = 0$:
 1) паралельні;
 2) перпендикулярні;
 3) збігаються.
10. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(12; 6)$ та відтинає від координатного кута трикутник із площею 15 од².

Рефлексія

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке загальне рівняння прямої. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, як розташовується пряма, задана загальним рівнянням, у прямокутній системі координат залежно від коефіцієнтів рівняння прямої. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я умію перетворювати загальне рівняння невертикальної прямої у рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію геометричний зміст параметрів k і b у рівнянні прямої з кутовим коефіцієнтом. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я умію записувати рівняння прямої, коли задано кутовий коефіцієнт та точку, через яку проходить ця пряма. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю умови паралельності та перпендикулярності двох прямих. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

