10 Тема 6. Тригонометричні функції

Урок 10. Урок-практикум. Побудова графіків тригонометричних функцій та дослідження властивостей функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) з'ясуєте, що таке гармонічні коливання;

2) навчитеся будувати графіки гармонічних коливань;

3) дізнаєтесь, як знаходити амплітуду, фазу, циклічну частоту та період гармонічних коливань;

4) дізнаєтесь, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти її по модулю;

5) дізнаєтесь, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти по модулю її аргумент;

6) навчитеся досліджувати основні властивості тригонометричних функції за допомогою графіків;

7) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

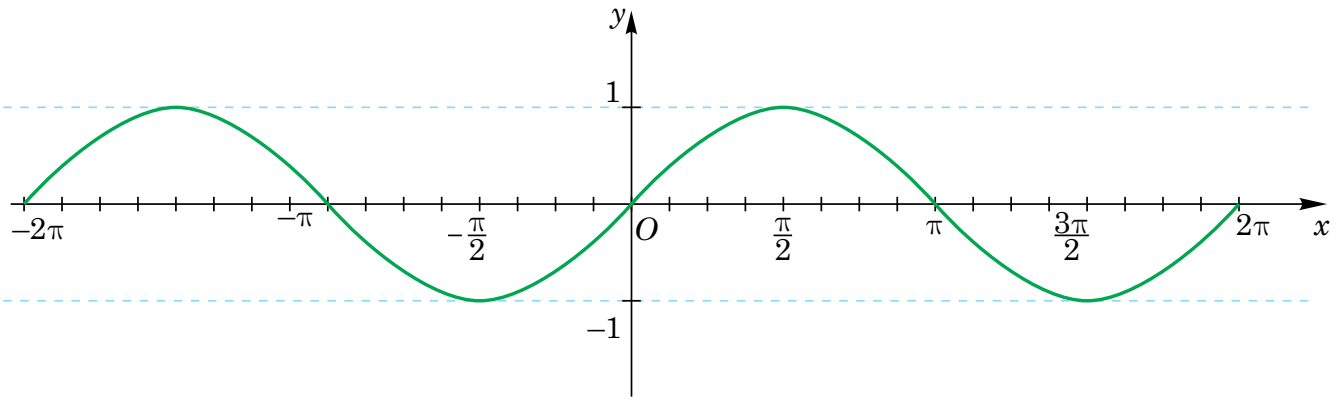
1. Знайдіть головний період функції $y = 2\sin 3x + 1$.

2. Знайдіть множину значень функції $y = 2\cos 4x + \frac{3}{2}$.

3. Обчисліть $\mathrm{tg}315^{\circ}$.

4. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\sin x}$.

5. Графік якої з тригонометричних функцій зображено на рисунку?



III. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $y = A\sin(kx + b)$, $y = A\cos(kx + b)$

1. Будуємо графіки функцій $y = A\sin x$ та $y = A\cos x$ із застосуванням графіків функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$, за перетвореннями $f(x) \to kf(x)$ та $f(x) \to -f(x)$.

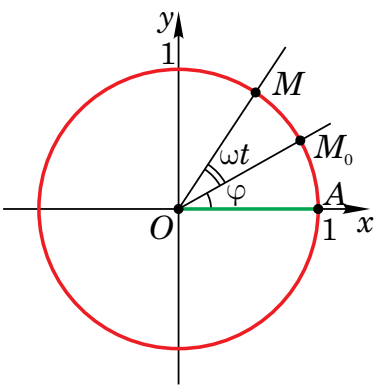
2. Будуємо графіки функцій із застосуванням графіків функцій $y = A\sin x$ та $y = A\cos x$, за перетвореннями $f(x) \to f(x+b)$.

3. Будуємо графіки функцій $y = A\sin(kx+b)$ та $y = A\cos(kx+b)$ із застосуванням графіків функцій та $y = A\cos(x+b)$, за перетвореннями $f(x) \to f(kx)$ та $f(x) \to f(-x)$.

Для наочного пояснення можна скористатися Geogebra-аплетом:

httpπs://$\omega\omega\omega$.geogebra.org/m/keh4v9ug

Гармонічні коливання



Нехай точка M рухається по колу з радіусом $r = A$ у додатному напрямі зі сталою кутовою швидкістю ω радіанів за секунду (див. рисунок). Якщо в початковий момент часу, тобто коли $t = 0$, точка M займала положення M_0, яке визначається кутом φ, то через t секунд вона займе деяке положення M, яке визначається кутом $\omega t + \varphi$. Тоді абсциса точки M дорівнює $A\cos(\omega t + \varphi)$, а ордината — $A\sin(\omega t + \varphi)$.

Формули $A\cos(\omega t + \varphi)$ і $A\sin(\omega t + \varphi)$ визначають змінну y як функції часу t. Це і є формули гармонічного коливання. У формулах: y — значення функції, t — аргумент функції, а числа A, ω і φ — константи (сталі), A — амплітуда коливання, φ — початкова фаза, ω — кутова швидкість (або циклічна частота), $\omega t + \varphi$ — фаза коливання.

Амплітуда визначається в лінійних одиницях довжини, фаза коливання й початкова фаза — у радіанах.

Якщо $\omega > 0$, то $\omega T = 2\pi$, звідси $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ — період гармонічного коливання.

Період гармонічного коливання визначається в секундах. Він обернено пропорційний кутовій швидкості відповідного обертання і не залежить ні від амплітуди, ні від початкової фази коливання.

Історична довідка

Розділ математики, який вивчає гармонічні коливання, називають «Гармонічний аналіз». Гармонічний аналіз зародився в середині XVIII ст. при розв'язанні задачі про коливання струни. Важливий внесок у розвиток гармонічного аналізу започаткований роботами Ж. Б. Фур'є на початку XIX ст. Самостійною математичною дисципліною «гармонічний аналіз» став наприкінці XIX ст. — початку XX ст. У подальшому виявилися тісні зв'язки гармонічного аналізу із загальними проблемами теорії функцій та функціонального аналізу. Методи гармонічного аналізу використовуються в багатьох галузях математики, а також у фізиці й техніці.

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

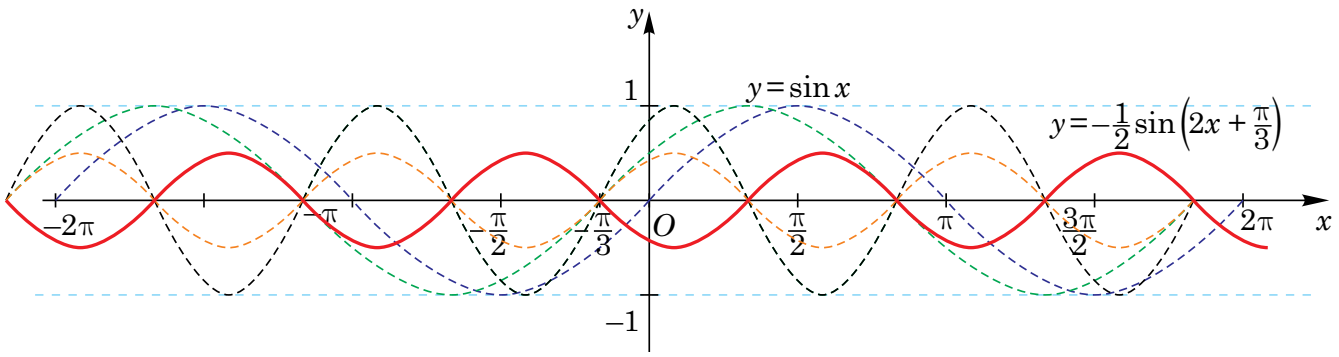
Розв'язання. 1) $y = \sin x \to y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ — паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{3}$ одиниці у від'ємному напрямку.

2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \to y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ — стиск графіка до осі ординат удвічі.

3) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \to y = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ — стиск графіка до осі абсцис удвічі.

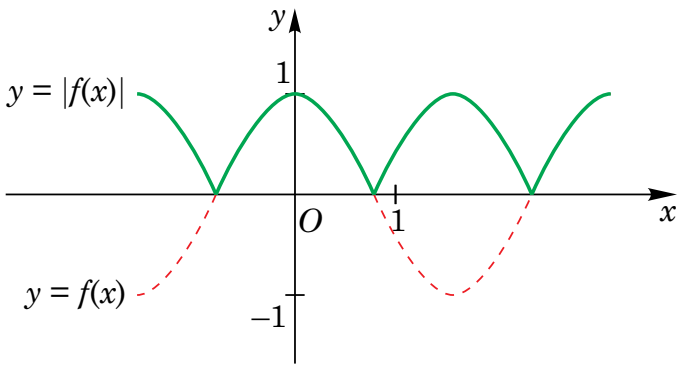
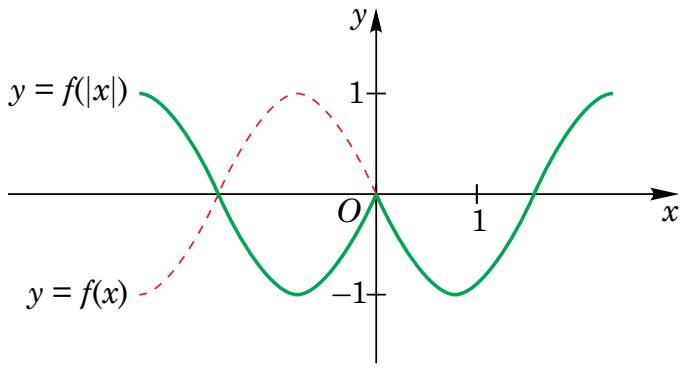
4) $y = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \to y = -\frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ — симетрія графіка відносно осі абсцис.

Графік побудовано на рисунку.



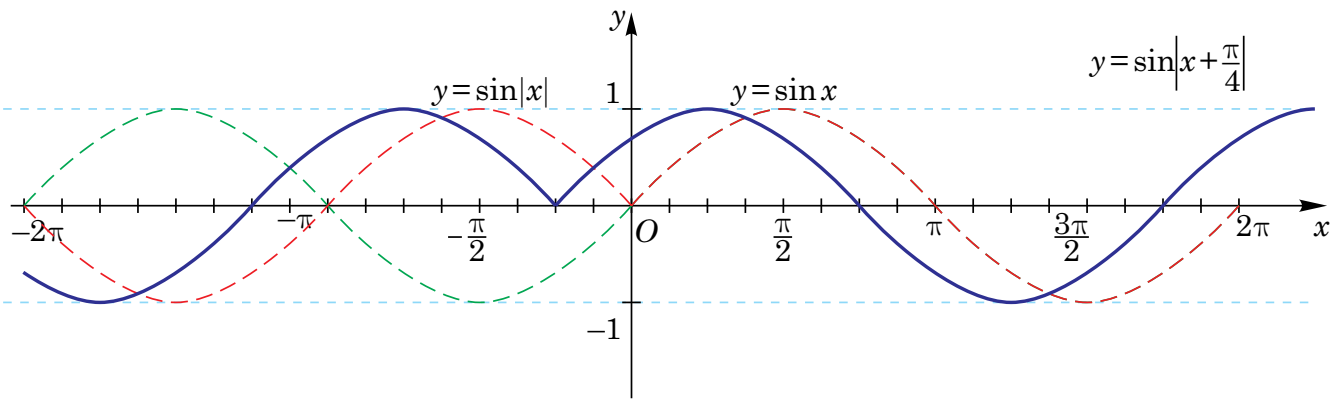
IV. Побудова графіків тригонометричних функцій з модулями

Нагадаємо геометричні перетворення графіків функцій, які містять знак модуля.

$y = \lvert f(x)\rvert$	Частину графіка, яка лежить над віссю абсцис, залишаємо без змін. Ту частину, яка лежить під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно осі абсцис.	
$y = f(\lvert x\rvert)$	Частину графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$, залишаємо без змін. Потім її ж симетрично відображаємо відносно осі ординат. Графік функції є об'єднанням двох кривих: $y = f(x)$, $x \geq 0$ і $y = f(-x)$, $x \leq 0$.	

Приклад 2. Побудуйте графік функції $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$.

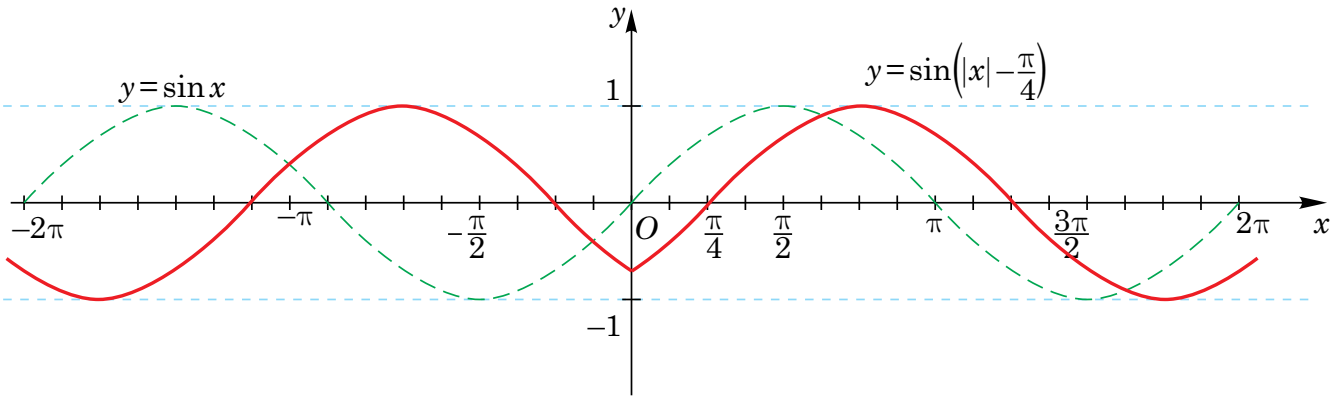
Розв'язання. Будуємо графік функції $y = \sin|x|$. Паралельно переносимо побудований графік уздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{4}$ одиниць у від'ємному напрямі. Отримуємо шуканий графік (див. рисунок).



Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Паралельно перенесемо графік функції $y = \sin x$ уздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{4}$ одиниць у додатному напрямі. Отримаємо графік функції $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Потім ту частину графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$, симетрично відобразимо від-

носно осі ординат. Об'єднання симетричних частин графіка — шуканий графік (див. рисунок).



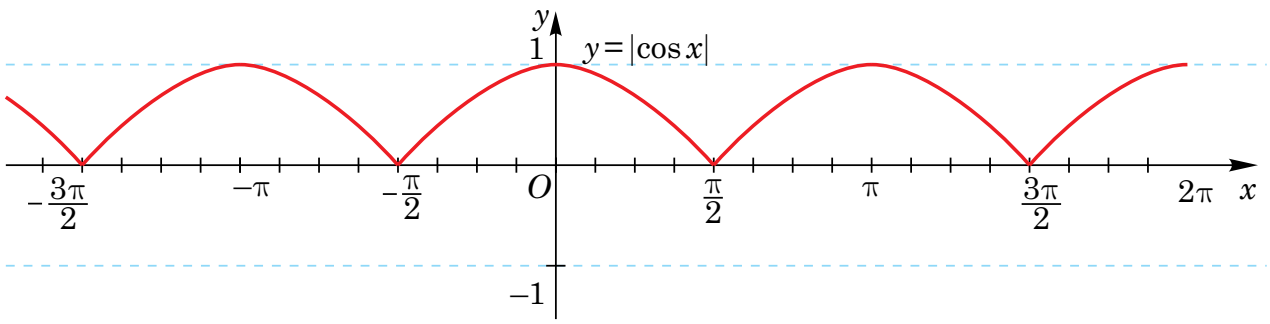
V. Дослідження властивостей тригонометричних функцій за їхніми графіками

Нагадаємо орієнтовну послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками.

1) Знайдіть область визначення функції.
2) Знайдіть множину значень функції.
3) Дослідіть функцію на парність.
4) Дослідіть функцію на періодичність.
5) Знайдіть нулі функції.
6) Укажіть проміжки знакосталості функції.
7) Укажіть проміжки монотонності функції.

Приклад 4. Побудуйте графік функції $y = |\cos x|$ та дослідіть властивості функції.

Розв'язання. Частину графіка функції $y = \cos x$, яка лежить у півплощині $y < 0$, симетрично відобразимо відносно осі абсцис. Шуканий графік — об'єднання двох кривих: $y = \cos x$ при $y \geq 0$ і $y = -\cos x$ при $y < 0$.



1) Областю визначення функції є множина усіх дійсних чисел.
2) Множиною значень є проміжок [0; 1].
3) Функція — парна.
4) Функція — періодична з головним періодом π.
5) Нулі функції — числа вигляду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

6) Функція додатна на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

7) Функція зростає на кожному з проміжків вигляду $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right]$, $n \in Z$, і спадає на кожному з проміжків вигляду $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n \in Z$.

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Відомо, що під час дихання легені людини весь час здійснюють коливальні рухи — розширюючись та стискаючись. За 40 секунд учень 10 класу зробив 14 повних дихальних циклів. Під час видиху обхват його грудної клітки становив $P_1 = 89$ см, а під час вдиху — $P_2 = 97$ см. Складіть функцію $P(t)$ залежності обхвату грудної клітки від часу дихання, якщо вважати, що коливання, які здійснюються, є гармонічними та змінюються за законом $P(t) = A\sin\omega t + P_c$, де A — амплітуда коливань (у см), яку можна обчислити за формулою $A = \frac{P_2 - P_1}{2}$, ω — частота коливань (у $с^{-1}$), P_c — середнє значення обхвату грудної клітки (у см), яке можна обчислити за формулою $P_c = \frac{P_2 + P_1}{2}$. Побудуйте графік зазначеної залежності. Складіть аналогічну функцію для себе чи для когось зі своїх однокласників/однокласниць.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C

Рівень A

1. Укажіть амплітуду і циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y = 2{,}6\sin 3\pi x$; 2) $y = 4\cos\left(\frac{x}{3} - 1\right)$.

2. Побудуйте графік гармонічного коливання:

1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Чим відрізняються гармонічні коливання 1) – 4):

1) $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $y = 0{,}5\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$?

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sin|x - 1|$; 2) $y = \mathrm{tg}\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y=\sin(|x|+1)$; 2) $y=-\cos\left(|x|+\frac{\pi}{4}\right)$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y=|\sin x|$; 2) $y=|\operatorname{tg} x|$; 3) $y=|\operatorname{ctg} x|$.

7. Побудуйте графік функції та визначте основні властивості функцій:

1) $y=\sin|x|+1$; 2) $y=-\sin 2|x|$; 3) $y=2\sin|x|+2$; 4) $y=\cos 3|x|$.

8. Побудуйте графік функції та визначте основні властивості функцій:

1) $y=|\sin 3x|$; 2) $y=\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right|$; 3) $y=|\operatorname{ctg} 2x|$; 4) $y=|\cos 3x|$.

Рівень В

1. Укажіть амплітуду й циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y=-2\sin\left(6-\frac{\pi x}{2}\right)$; 2) $y=-1{,}5\cos\left(-5x-\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Електричний струм, який живить міську освітлювальну мережу, є змінним струмом. Його сила I постійно змінюється, здійснюючи гармонічне коливання $I=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$, де I_0 — максимальне значення сили струму; T — період коливання; φ — початкова фаза. У які моменти часу сила струму досягає мінімального або максимального значення і коли значення сили струму дорівнює нулю? (Бевз Г. П. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти).

3. Побудуйте графік функції:

1) $y=-2\sin\left(\frac{1}{2}|x|-1\right)$; 2) $y=2\cos(3|x|+2)$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|$; 2) $y=\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|$; 3) $y=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; 4) $y=\left|\sin x-\frac{1}{3}\right|$.

5. Побудуйте графік функції та визначте основні властивості функції:

1) $y=\sin\left(|x|-\frac{\pi}{3}\right)+1$; 2) $f(x)=\cos\left(|x|+\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y=3\cos|x|-3$; 4) $f(x)=|1-\cos 3x|$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y=\operatorname{tg}\left(|x|-\frac{\pi}{6}\right)+1$; 2) $y=3\operatorname{ctg} 2|x|-\frac{1}{2}$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|3\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1\right|$; 2) $y=\left|\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-1\right|$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$;

2) $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}$;

3) $y=\cos x-|\cos x|$;

4) $y=|\operatorname{tg} x|-1$.

Рівень С

1. Побудуйте графік гармонічного коливання та вкажіть його амплітуду, фазу, початкову фазу, циклічну частоту та період коливання:

1) $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$;

4) $y=0{,}5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|\cos\left|2x-\frac{\pi}{3}\right|\right|$;

2) $y=3|\cos|3x-1||-1$;

3) $y=2\left|\sin\left|\frac{1}{2}x-1\right|\right|$;

4) $y=\left|\operatorname{tg}\left|\frac{1}{2}x+1\right|\right|$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y=2\cos\left(2|x|-\frac{\pi}{3}\right)-2$;

2) $y=-\frac{1}{2}\cos\left(3|x|-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y=-2\operatorname{tg}\left(|x|+\frac{3\pi}{4}\right)+2$;

2) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(|x|-\frac{\pi}{5}\right)+\frac{1}{2}$;

3) $y=\operatorname{ctg}\left(|x|+\frac{2\pi}{3}\right)-2$;

4) $y=\operatorname{ctg}\left(4|x|-\frac{2\pi}{3}\right)-1$.

5. Побудуйте графік функції та визначте основні властивості функції:

1) $y=\left|3\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right|$;

2) $y=\left|2\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|$;

3) $y=\left|1-\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right|$;

4) $y=\left|\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}\right|$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|1-2\cos\left(\frac{|x|}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\right|$;

2) $y=\left|\frac{1}{3}\sin\left(\frac{2}{3}|x|-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2}{3}\right|$.

3) $y=\left|2\operatorname{tg}\left(|x|-\frac{5\pi}{6}\right)-3\right|$;

4) $y=\left|\frac{3}{2}\operatorname{tg}\left(2|x|-\frac{4\pi}{5}\right)-3\right|$;

5) $y=\left|2\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}|x|+\frac{3\pi}{4}\right)+1\right|$;

6) $y=\left|\frac{3}{4}\operatorname{ctg}\left(|x|-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\right|$.

Рефлексія

1. Я вмію будувати графіки гармонічних коливань.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я знаю, як знаходити амплітуду, фазу, циклічну частоту та період гармонічних коливань.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти її по модулю.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти по модулю її аргумент.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я вмію досліджувати основні властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми проєктів

1. Гармонічні коливання у пружинному маятнику.
2. Коливання математичного маятника.
3. Комп'ютерне моделювання гармонічних коливань.
4. Гармонічні коливання в біології та в медицині.
5. Резонанс у коливальних системах.
6. Анімація геометричних перетворень при побудові графіків тригонометричних функцій.
7. Застосування модуля у тригонометричних функцій для створення візерунків та орнаментів.