10 Тема 6. Тригонометричні функції

Урок 10. Урок-практикум. Побудова графіків тригонометричних функцій та дослідження властивостей функцій

План уроку

1. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $y = A\sin(kx + b)$, $y = A\cos(kx + b)$.
2. Побудова графіків тригонометричних функцій із модулями.
3. Дослідження властивостей функцій за їхніми графіками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує комплексну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1-1];

оцінює вірогідність даних [12 МАО 1.2.2-2];

розрізняє форми подачі інформації математичного змісту (текст, графік, аудіо, відео тощо) [12 МАО 2.1.1-1];

упорядковує інформацію математичного змісту [12 МАО 2.1.3-1];

самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в комплексній проблемній ситуації та їхню вірогідність [12 МАО 3.1.1-1];

досліджує та доводить математичні твердження [12 МАО 4.1.2-2];

визначає можливості застосування відомих математичних фактів і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.

2) Розв'яжіть з учнями/ученицями кілька завдань на повторення, на ваш вибір.

3) Повторіть геометричні перетворення графіків тригонометричних функцій.

4) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

5) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні. При поясненні теорії застосовуйте таблиці, які наведено.

6) Побудову графіків тригонометричних функцій з модулями вивчайте з урахуванням можливостей учнів/учениць класу.

7) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади, яких запропоновано з надлишком. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

8) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

9) Заплануйте проведення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичної задачі і тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

10) Під час розв'язання задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачі, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

11) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Також темами проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали рівень А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна створити цікаву фігуру або орнамент, якщо аргумент функції або всю функцію взяти під знак модуля?

2) Чи відомий вам термін «модуляція звуку»? Чи пов'язаний цей термін із геометричними перетвореннями тригонометричних функцій, що містять знак модуля?

3) Чому звук має хвильову природу? Який зв'язок між звуком і гармонічними коливаннями?

4) Чи можна передбачити майбутнє положення тіла, що здійснює коливання?

5) Чи існує, на вашу думку, «ідеальне» коливання в природі?

II. (Усно). Повторення (4–5 хв)

1. Знайдіть головний період функції $y = 2\sin 3x + 1$.

Відповідь. $\frac{2\pi}{3}$.

2. Знайдіть множину значень функції $y = 2\cos 4x + \frac{3}{2}$.

Відповідь. [–0,5; 3,5].

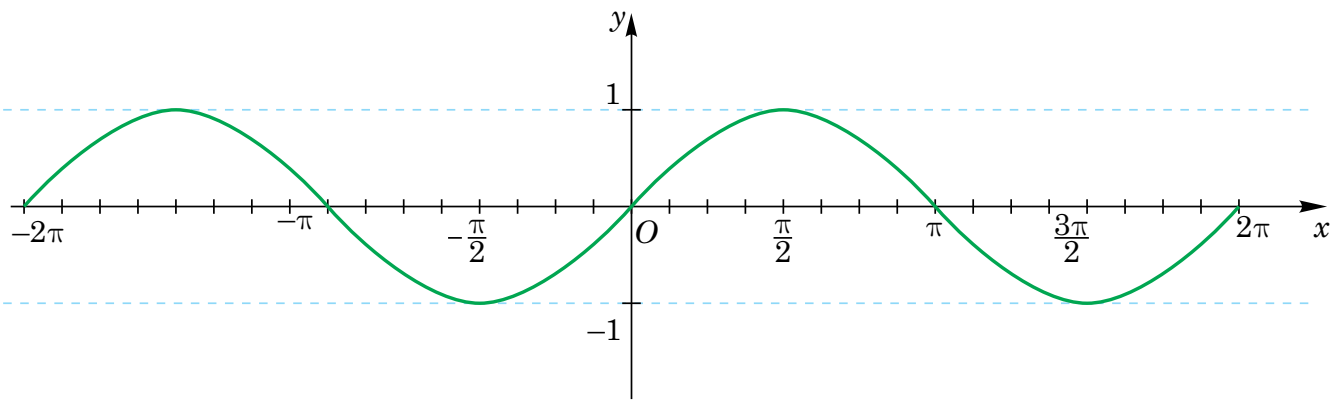
3. Обчисліть tg315°.

Відповідь. –1.

4. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\sin x}$.

Відповідь. $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

5. Графік якої з тригонометричних функцій зображено на рисунку?



Відповідь. $y = \sin x$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Відомо, що під час дихання легені людини весь час здійснюють коливальні рухи — розширюючись та стискаючись. За 40 секунд учень 10 класу зробив 14 повних дихальних циклів. Під час видиху обхват його грудної клітки становив $P_1 = 89$ см, а під час вдиху — $P_2 = 97$ см. Складіть функцію $P(t)$ залежності обхвату грудної клітки від часу дихання, якщо вважати, що коливання, які здійснюються, є гармонічними та змінюються за законом $P(t) = A\sin\omega t + P_c$, де A — амплітуда коливань (у см), яку можна обчислити за формулою $A = \frac{P_2 - P_1}{2}$, ω — частота коливань (у $с^{-1}$), P_c — середнє значення обхвату грудної клітки (у см), яке можна обчислити за формулою $P_c = \frac{P_2 + P_1}{2}$. Побудуйте графік зазначеної залежності. Складіть аналогічну функцію для себе чи для когось зі своїх однокласників/однокласниць.

III. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $y = A\sin(kx + b)$, $y = A\cos(kx + b)$

1. Будуємо графіки функцій $y = A\sin x$ та $y = A\cos x$ із застосуванням графіків функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$, за перетвореннями $f(x) \to kf(x)$ та $f(x) \to -f(x)$.

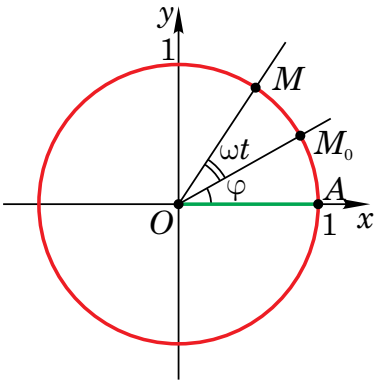
2. Будуємо графіки функцій із застосуванням графіків функцій $y = A\sin x$ та $y = A\cos x$, за перетвореннями $f(x) \to f(x + b)$.

3. Будуємо графіки функцій $y = A\sin(kx+b)$ та $y = A\cos(kx+b)$ із застосуванням графіків функцій та $y = A\cos(x+b)$, за перетвореннями $f(x) \to f(kx)$ та $f(x) \to f(-x)$.

Для наочного пояснення можна скористатися Geogebra-аплетом:

httpπs://ωωω.geogebra.org/m/keh4v9ug

Гармонічні коливання



Нехай точка M рухається по колу з радіусом $r = A$ у додатному напрямі зі сталою кутовою швидкістю ω радіанів за секунду (див. рисунок). Якщо в початковий момент часу, тобто коли $t = 0$, точка M займала положення M_0, яке визначається кутом φ, то через t секунд вона займе деяке положення M, яке визначається кутом $\omega t + \varphi$. Тоді абсциса точки M дорівнює $A\cos(\omega t + \varphi)$, а ордината — $A\sin(\omega t + \varphi)$.

Формули $A\cos(\omega t + \varphi)$ і $A\sin(\omega t + \varphi)$ визначають змінну y як функції часу t. Це і є формули гармонічного коливання. У формулах: y — значення функції, t — аргумент функції, а числа A, ω і φ — константи (сталі), A — амплітуда коливання, φ — початкова фаза, ω — кутова швидкість (або циклічна частота), $\omega t + \varphi$ — фаза коливання.

Амплітуда визначається в лінійних одиницях довжини, фаза коливання й початкова фаза — у радіанах.

Якщо $\omega > 0$, то $\omega T = 2\pi$, звідси $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ — період гармонічного коливання.

Період гармонічного коливання визначається в секундах. Він обернено пропорційний кутовій швидкості відповідного обертання і не залежить ні від амплітуди, ні від початкової фази коливання.

Історична довідка

Розділ математики, який вивчає гармонічні коливання, називають «Гармонічний аналіз». Гармонічний аналіз зародився в середині XVIII ст. при розв'язанні задачі про коливання струни. Важливий внесок у розвиток гармонічного аналізу започаткований роботами Ж. Б. Фур'є на початку XIX ст. Самостійною математичною дисципліною «гармонічний аналіз» став наприкінці XIX ст. — початку XX ст. У подальшому виявилися тісні зв'язки гармонічного аналізу із загальними проблемами теорії функцій та функціонального аналізу. Методи гармонічного аналізу використовуються в багатьох галузях математики, а також у фізиці й техніці.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

6. Побудуйте графік функції $y = -\dfrac{1}{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

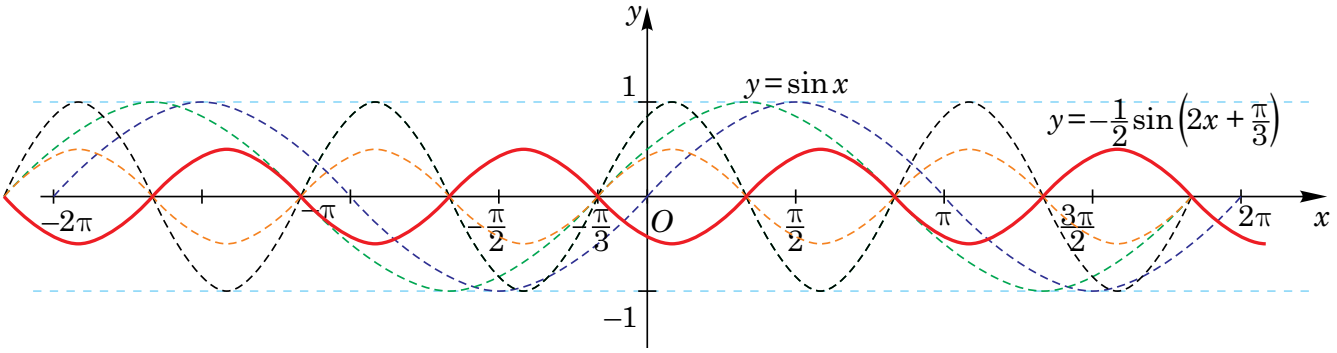
Розв'язання. 1) $y = \sin x \to y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ — паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис на $\dfrac{\pi}{3}$ одиниці у від'ємному напрямку.

2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\to y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ — стиск графіка до осі ординат удвічі.

3) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\to y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ — стиск графіка до осі абсцис удвічі.

4) $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\to y=-\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ — симетрія графіка відносно осі абсцис.

Графік побудовано на рисунку.



7. Укажіть амплітуду A і циклічну частоту ω гармонічного коливання, яке задається функцією $y=-3\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$.

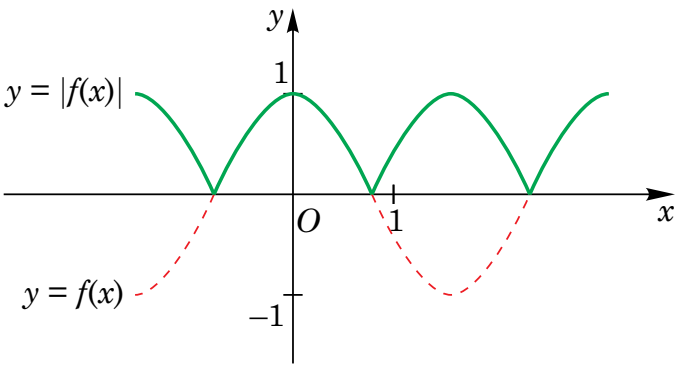
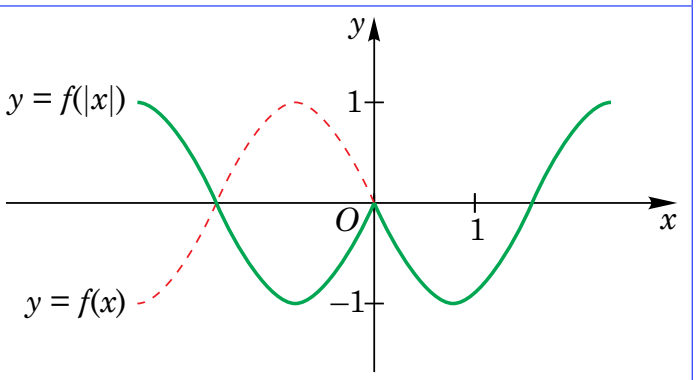
Розв'язання. Можна записати: $y=-3\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)=3\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Отже, $A=3$, $\omega=4$.

Відповідь. $A=3$ (у. од. д), $\omega=4$ с$^{-1}$.

IV. Побудова графіків тригонометричних функцій з модулями

Нагадаємо геометричні перетворення графіків функцій, які містять знак модуля.

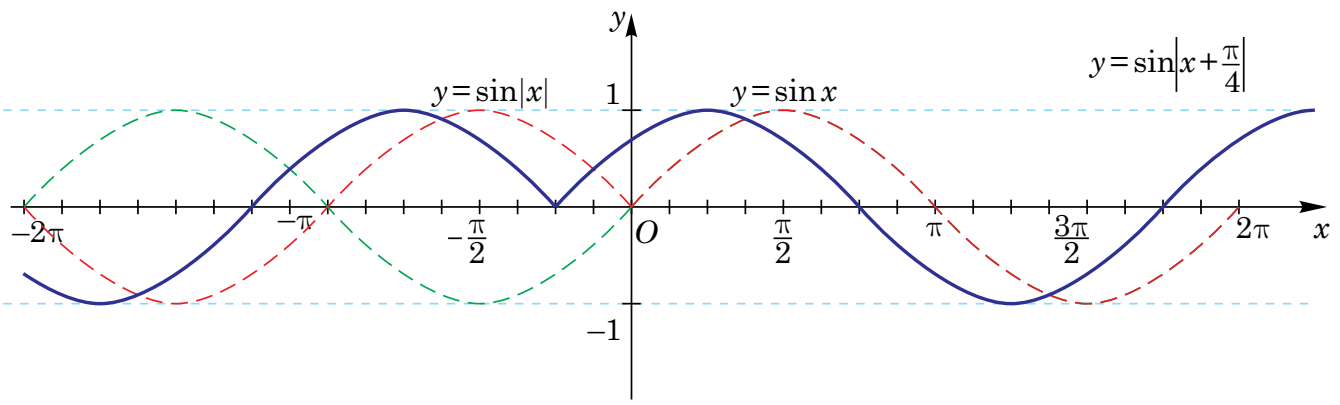
$y=\lvert f(x)\rvert$	Частину графіка, яка лежить над віссю абсцис, залишаємо без змін. Ту частину, яка лежить під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно осі абсцис.	
$y=f(\lvert x\rvert)$	Частину графіка, яка лежить у півплощині $x\ge 0$, залишаємо без змін. Потім її ж симетрично відображаємо відносно осі ординат. Графік функції є об'єднанням двох кривих: $y=f(x)$, $x\ge 0$ і $y=f(-x)$, $x\le 0$.	

Ілюстративні приклади (5 хв)

Детально проаналізуйте, чим послідовність побудови графіка у прикладі 8 відрізняється від прикладу 9. Наголосіть учням/ученицям, що геометричні перетворення дозволяють брати по модулю або лише аргумент або всю функцію.

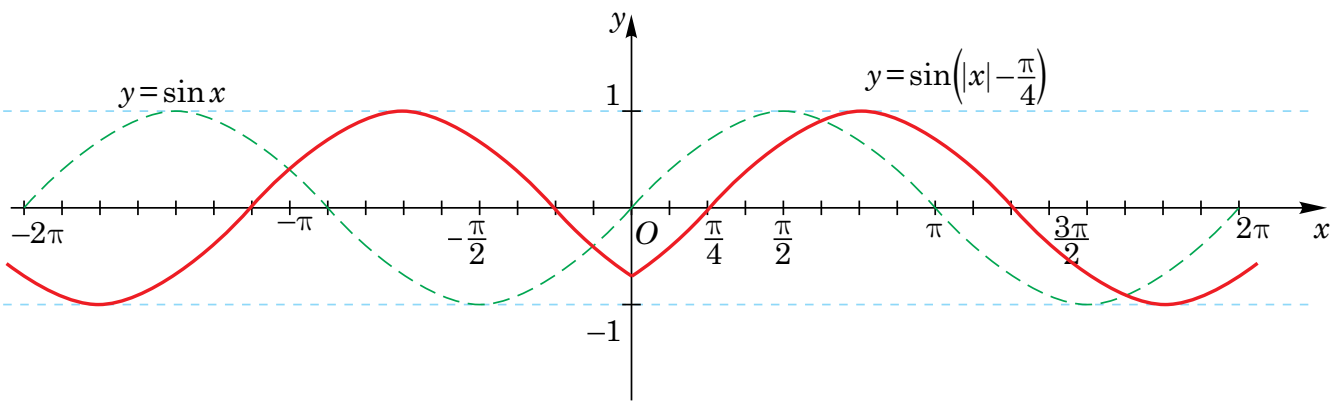
8. Побудуйте графік функції $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$.

Розв'язання. Будуємо графік функції $y = \sin|x|$. Паралельно переносимо побудований графік уздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{4}$ одиниць у від'ємному напрямі. Отримуємо шуканий графік (див. рисунок).



9. Побудуйте графік функції $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Паралельно перенесемо графік функції $y = \sin x$ уздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{4}$ одиниць у додатному напрямі. Отримаємо графік функції $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Потім ту частину графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$, симетрично відобразимо відносно осі ординат. Об'єднання симетричних частин графіка — шуканий графік (див. рисунок).



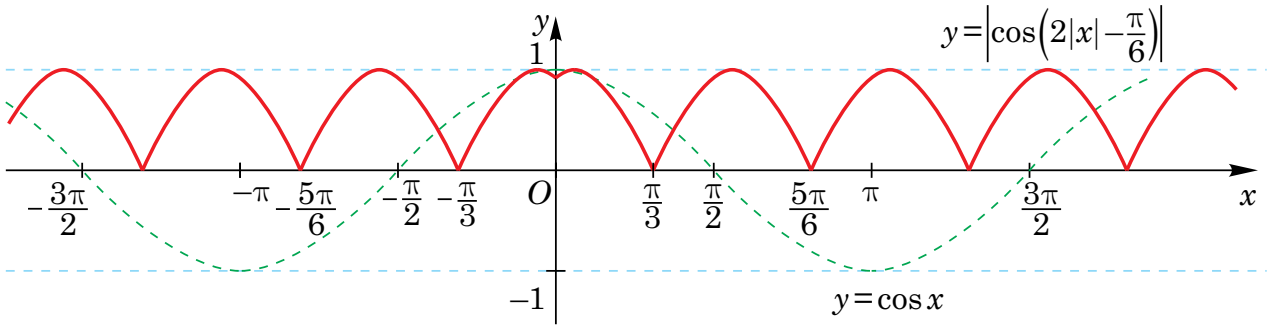
10*. Побудуйте графік функції $y=\left|\cos\left(2|x|-\frac{\pi}{6}\right)\right|$.

Розв'язання. 1) $y=\cos x \to y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ — паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{6}$ одиниць у додатному напрямку.

2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \to y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ — стиск графіка до осі ординат удвічі.

3) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \to y=\cos\left(2|x|-\frac{\pi}{6}\right)$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$.

4) $y=\cos\left(2|x|-\frac{\pi}{6}\right) \to y=\left|\cos\left(2|x|-\frac{\pi}{6}\right)\right|$ — симетрія відносно осі абсцис частини графіка, яка лежить під віссю (див. рисунок).



V. Дослідження властивостей тригонометричних функцій за їхніми графіками

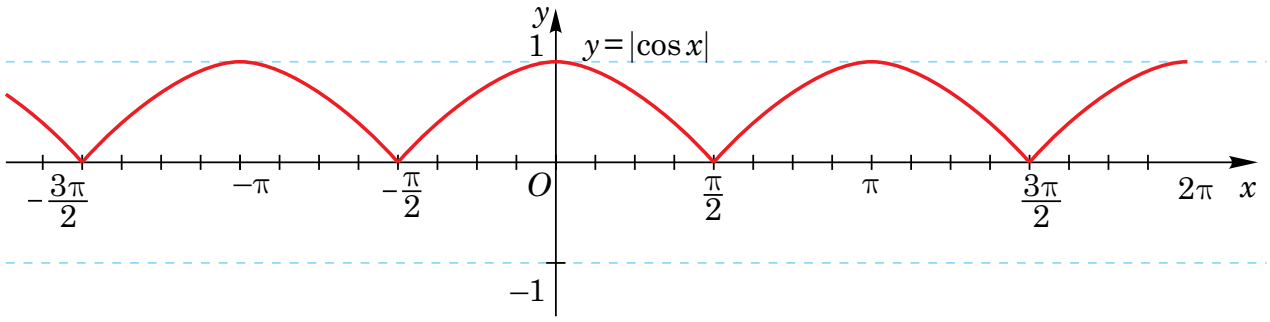
Нагадаємо орієнтовну послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками.

1) Знайдіть область визначення функції.
2) Знайдіть множину значень функції.
3) Дослідіть функцію на парність.
4) Дослідіть функцію на періодичність.
5) Знайдіть нулі функції.
6) Укажіть проміжки знакосталості функції.
7) Укажіть проміжки монотонності функції.

Ілюстративні приклади

11. Побудуйте графік функції $y=|\cos x|$ та дослідіть властивості функції.

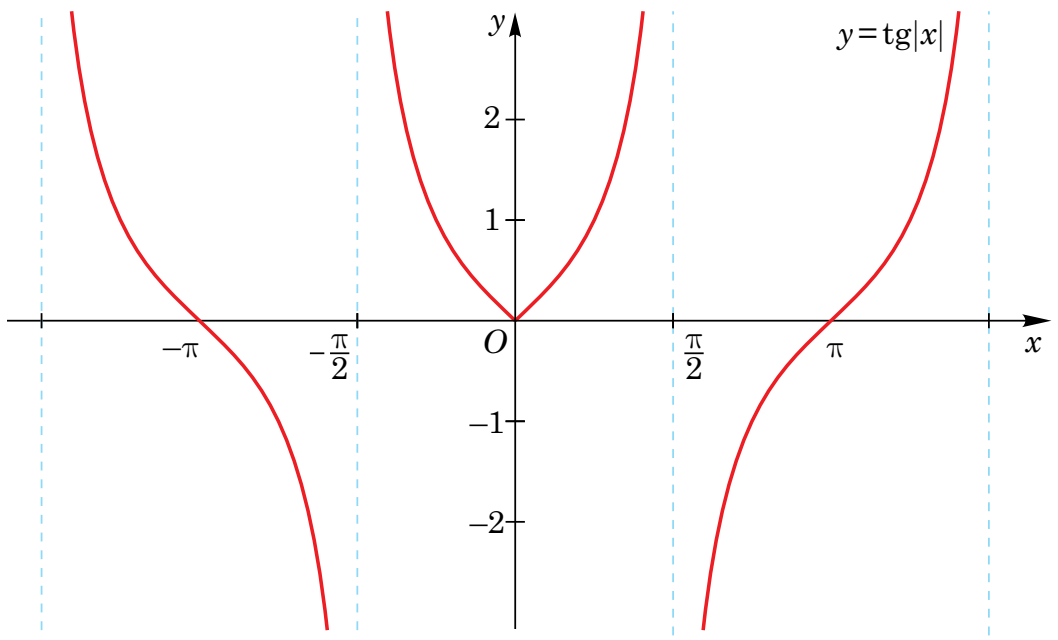
Розв'язання. Частину графіка функції $y=\cos x$, яка лежить у півплощині $y<0$, симетрично відобразимо відносно осі абсцис. Шуканий графік — об'єднання двох кривих: $y=\cos x$ при $y \geq 0$ і $y=-\cos x$ при $y<0$.



1) Областю визначення функції є множина усіх дійсних чисел.
2) Множиною значень є проміжок [0; 1].
3) Функція — парна.
4) Функція — періодична з головним періодом π.
5) Нулі функції — числа вигляду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.
6) Функція додатна на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.
7) Функція зростає на кожному з проміжків вигляду $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right]$, $n \in Z$, і спадає на кожному з проміжків вигляду $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

12. Побудуйте графік функції $y = \mathrm{tg}|x|$ та дослідіть її властивості.

Розв'язання. Частину графіка функції $y = \mathrm{tg}x$, яка лежить у півплощині $x \geq 0$, симетрично відображаємо відносно осі ординат (див. рисунок).



1) Областю визначення функції є множина усіх дійсних чисел, окрім чисел виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.
2) Множиною значень є множина усіх дійсних чисел.
3) Функція є парною.

4) Функція — неперіодична.
5) Нулі функції — числа виду $x = \pi n$, $n \in Z$.

6) Функція додатна на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in Z$, $n \le 0$ та $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, $k \ge 0$.

Функція від'ємна на кожному з проміжків вигляду $\left(-\pi + \pi n;\ -\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, $n \le 0$ та $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi + \pi k\right)$, $k \in Z$, $k \ge 0$.

7) Функція зростає на кожному з проміжків вигляду $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{3\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, $n \ge 0$, а також на проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ і спадає на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{3\pi}{2} + \pi k;\ -\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, $k \le 0$, а також на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (6–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Відомо, що під час дихання легені людини весь час здійснюють коливальні рухи — розширюючись та стискаючись. За 40 секунд учень 10 класу зробив 14 повних дихальних циклів. Під час видиху обхват його грудної клітки становив $P_1 = 89$ см, а під час вдиху — $P_2 = 97$ см. Складіть функцію $P(t)$ залежності обхвату грудної клітки від часу дихання, якщо вважати, що коливання, які здійснюються, є гармонічними та змінюються за законом $P(t) = A\sin\omega t + P_c$, де A — амплітуда коливань (у см), яку можна обчислити за формулою $A = \frac{P_2 - P_1}{2}$, ω — частота коливань (у $с^{-1}$), P_c — середнє значення обхвату грудної клітки (у см), яке можна обчислити за формулою $P_c = \frac{P_2 + P_1}{2}$. Побудуйте графік зазначеної залежності. Складіть аналогічну функцію для себе чи для когось зі своїх однокласників/однокласниць.

Розв'язання. 1) Амплітуда коливань легенів: $A = \frac{P_2 - P_1}{2} = \frac{97 - 89}{2} = 4$ (см).

2) Середнє значення обхвату грудної клітки: $P_c = \frac{P_2 + P_1}{2} = \frac{97 + 89}{2} = 93$ (см).

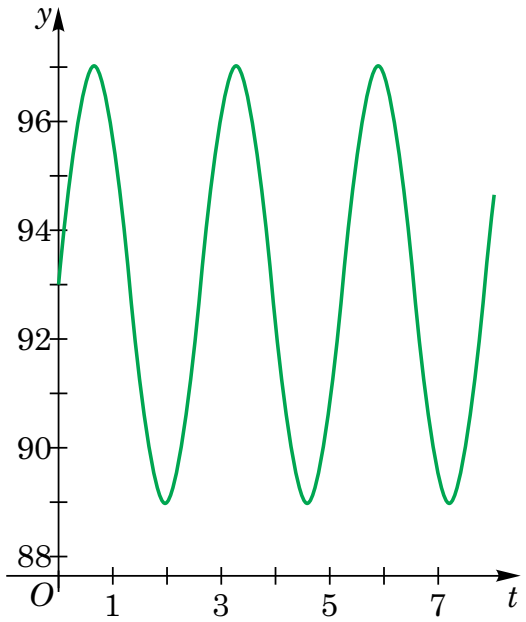
3) За 40 с учень зробив $n = 14$ вдихів. Обчислимо період коливань T:

$T = \frac{t}{n} = \frac{40}{14} = 2{,}6$ (с).

Обчислимо частоту коливань: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}6} \approx \frac{12}{5} = 2{,}4$ ($с^{-1}$).

Отже, функція $P(t)$ залежності обхвату грудної клітки від часу дихання:
$P(t) = 4\sin 2{,}4t + 93$.

Графік функції:



Відповідь. $P(t) = 4\sin 2{,}4t + 93$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (8–10 хв)

Рівень A

1. Укажіть амплітуду і циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y = 2{,}6\sin 3\pi x$; 2) $y = 4\cos\left(\frac{x}{3} - 1\right)$.

2. Побудуйте графік гармонічного коливання:

1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Чим відрізняються гармонічні коливання 1) – 4):

1) $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $y = 0{,}5\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$?

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sin|x - 1|$; 2) $y = \operatorname{tg}\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin(|x| + 1)$; 2) $y = -\cos\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y=|\sin x|$; 2) $y=|\operatorname{tg} x|$; 3) $y=|\operatorname{ctg} x|$.

7. Побудуйте графік функції та визначте основні властивості функцій:

1) $y=\sin|x|+1$; 2) $y=-\sin 2|x|$; 3) $y=2\sin|x|+2$; 4) $y=\cos 3|x|$.

8. Побудуйте графік функції та визначте основні властивості функцій:

1) $y=|\sin 3x|$; 2) $y=\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right|$; 3) $y=|\operatorname{ctg} 2x|$; 4) $y=|\cos 3x|$.

Рівень В

1. Укажіть амплітуду й циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y=-2\sin\left(6-\frac{\pi x}{2}\right)$; 2) $y=-1{,}5\cos\left(-5x-\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Електричний струм, який живить міську освітлювальну мережу, є змінним струмом. Його сила I постійно змінюється, здійснюючи гармонічне коливання $I=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$, де I_0 — максимальне значення сили струму; T — період коливання; φ — початкова фаза. У які моменти часу сила струму досягає мінімального або максимального значення і коли значення сили струму дорівнює нулю? (Бевз Г. П. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти).

3. Побудуйте графік функції:

1) $y=-2\sin\left(\frac{1}{2}|x|-1\right)$; 2) $y=2\cos(3|x|+2)$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|$; 2) $y=\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|$; 3) $y=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; 4) $y=\left|\sin x-\frac{1}{3}\right|$.

5. Побудуйте графік функції та визначте основні властивості функції:

1) $y=\sin\left(|x|-\frac{\pi}{3}\right)+1$; 2) $f(x)=\cos\left(|x|+\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y=3\cos|x|-3$; 4) $f(x)=|1-\cos 3x|$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y=\operatorname{tg}\left(|x|-\frac{\pi}{6}\right)+1$; 2) $y=3\operatorname{ctg} 2|x|-\frac{1}{2}$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|3\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1\right|$; 2) $y=\left|\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-1\right|$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$; 2) $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}$;

3) $y=\cos x-|\cos x|$; 4) $y=|\operatorname{tg} x|-1$.

Рівень С

1. Побудуйте графік гармонічного коливання та вкажіть його амплітуду, фазу, початкову фазу, циклічну частоту та період коливання:

1) $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $y = 0{,}5\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\cos\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|\right|$;

2) $y = 3\left|\cos|3x - 1|\right| - 1$;

3) $y = 2\left|\sin\left|\frac{1}{2}x - 1\right|\right|$;

4) $y = \left|\operatorname{tg}\left|\frac{1}{2}x + 1\right|\right|$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 2$;

2) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(3|x| - \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2\operatorname{tg}\left(|x| + \frac{3\pi}{4}\right) + 2$;

2) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(|x| - \frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}$;

3) $y = \operatorname{ctg}\left(|x| + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$;

4) $y = \operatorname{ctg}\left(4|x| - \frac{2\pi}{3}\right) - 1$.

5. Побудуйте графік функції та визначте основні властивості функції:

1) $y = \left|3\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right|$;

2) $y = \left|2\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\right|$;

3) $y = \left|1 - \frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right|$;

4) $y = \left|\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{3}{2}\right|$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|1 - 2\cos\left(\frac{|x|}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)\right|$;

2) $y = \left|\frac{1}{3}\sin\left(\frac{2}{3}|x| - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{3}\right|$.

3) $y = \left|2\operatorname{tg}\left(|x| - \frac{5\pi}{6}\right) - 3\right|$;

4) $y = \left|\frac{3}{2}\operatorname{tg}\left(2|x| - \frac{4\pi}{5}\right) - 3\right|$;

5) $y = \left|2\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}|x| + \frac{3\pi}{4}\right) + 1\right|$;

6) $y = \left|\frac{3}{4}\operatorname{ctg}\left(|x| - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\right|$.

VIII. Рефлексія (2 хв)

1. Я вмію будувати графіки гармонічних коливань.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я знаю, як знаходити амплітуду, фазу, циклічну частоту та період гармонічних коливань.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти її по модулю.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти по модулю її аргумент.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я вмію досліджувати основні властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми учнівських проєктів

1. Гармонічні коливання у пружинному маятнику.
2. Коливання математичного маятника.
3. Комп'ютерне моделювання гармонічних коливань.
4. Гармонічні коливання в біології та в медицині.
5. Резонанс у коливальних системах.
6. Анімація геометричних перетворень при побудові графіків тригонометричних функцій.
7. Застосування модуля у тригонометричних функцій для створення візерунків та орнаментів.