10 Тема 6. Тригонометричні функції

Урок 3. Означення тригонометричних функцій центрального кута

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) з'ясуєте, що таке синус та косинус довільного кута;

2) вивчите основні властивості синуса і косинуса довільного кута;

3) з'ясуєте, що таке тангенс і котангенс довільного кута;

4) вивчите основні властивості тангенса і котангенса довільного кута;

5) навчитесь позначати синуси та косинуси на тригонометричному колі;

6) навчитеся визначати знаки тригонометричних функцій у кожній з координатних чвертей;

7) дізнаєтесь, як змінюються тригонометричні функції при збільшенні кута від 0 рад до 2π рад.

8) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Запишіть координати точки, що відповідають куту $\frac{\pi}{6}$ при повороті точки $A(1;\ 0)$ на цей кут.

2. В якій координатній чверті знаходиться точка, абсциса і ордината якої від'ємні числа?

3. Розв'яжіть рівняння $x^4 = 81$.

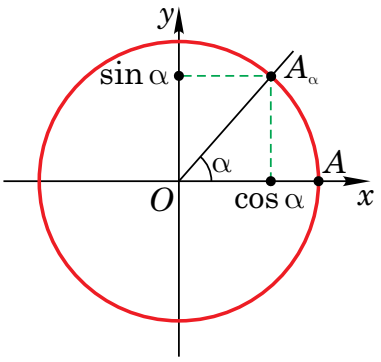
4. Спростіть вираз $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.

5. Розв'яжіть нерівність $\frac{x-3}{x+4} \le 0$.

III. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса

Тригонометричні функції – це важливі математичні поняття, які відіграють ключову роль у математиці, оскільки дозволяють не лише описувати співвідношення між сторонами та кутами трикутників й інших геометричних фігур, а також допомагають аналізувати періодичні процеси. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса можна розширити за допомогою тригонометричного кола. Це дає змогу застосовувати тригонометричні функції не тільки в геометрії, а й у фізиці, техніці, астрономії та в інших науках.

Означення. Ординату точки A_α, яка відповідає куту α повороту точки $A(1; 0)$, називають *синусом* кута α (позначають sinα), а абсцису точки A_α називають ***косинусом*** кута α (позначають cos α) (див. рисунок).



Властивості синуса та косинуса

1. Для будь-якого кута абсциса та ордината точки A_α не можуть бути більшими за 1 чи меншими від –1, тому завжди будуть правильними такі нерівності: $-1 \le \sin\alpha \le 1$ та $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

2. Кутам α та β, для яких виконується рівність $\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка на тригонометричному колі, тому $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$ і $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Кутам α та –α відповідають точки на тригонометричному колі, симетричні відносно осі *Ox*, тому $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ та $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

4. Кутам α та α + π відповідають діаметрально протилежні точки на тригонометричному колі, тобто точки, симетричні відносно початку координат, тому $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ і $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

5. Оскільки координати усіх точок, які належать тригонометричному колу, задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Означення. Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

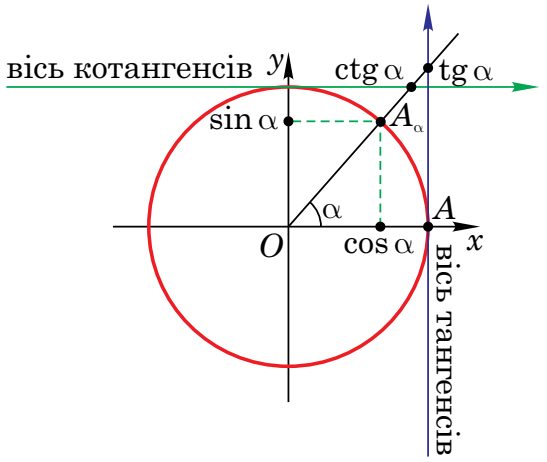
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \ne \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Безпосередньо з означень тангенса та котангенса випливає, що для будь-якого кута α, такого, що $\alpha \ne \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, є правильними рівності:

1) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.



Запишемо рівняння прямої OA_α, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки ця пряма не вертикальна і завжди проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $y = kx$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої (див. рисунок).

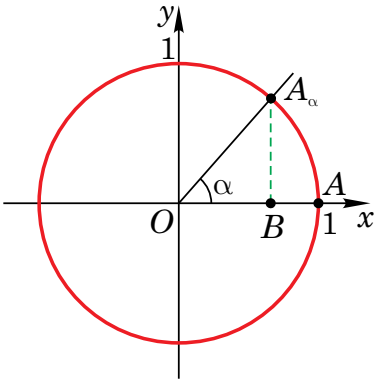
Оскільки пряма проходить через точку $A_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, то $\sin\alpha = k\cos\alpha$, звідси $k = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. Тобто рівняння прямої $y = (\operatorname{tg}\alpha)\cdot x$. Пряма $y = (\operatorname{tg}\alpha)\cdot x$ перетинає пряму $x = 1$ у точці з координатами $(1;\ \operatorname{tg}\alpha)$, а пряму $y = 1$ — у точці $(\operatorname{ctg}\alpha;\ 1)$ (див. рисунок).

Властивості тангенса й котангенса

№	Властивість	Доведення
1.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.	$\operatorname{tg}(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$.
2.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \dfrac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$.
3.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \dfrac{\sin(\alpha - \pi)}{\cos(\alpha - \pi)} = \dfrac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \dfrac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \dfrac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.
4.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \dfrac{\cos(\alpha - \pi)}{\sin(\alpha - \pi)} = \dfrac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$. $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \dfrac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \dfrac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.
5.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.	1) Для $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi m) = \dfrac{\sin(\alpha + 2\pi m)}{\cos(\alpha + 2\pi m)} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. 2) Для $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{tg}(\alpha + \pi(2m+1)) = \dfrac{\sin(\alpha + \pi + 2\pi m)}{\cos(\alpha + \pi + 2\pi m)} =$ $= \dfrac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \dfrac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

№	Властивість	Доведення
6.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, виконується рівність $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.	1) Для $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi m) = \frac{\cos(\alpha + 2\pi m)}{\sin(\alpha + 2\pi m)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$. 2) Для $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi(2m+1)) = \frac{\cos(\alpha + \pi + 2\pi m)}{\sin(\alpha + \pi + 2\pi m)} = \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Приклад 1. Доведіть, що для кута $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.



Доведення. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Оскільки кут α — гострий, то $\cos\alpha = OB$ та $\sin\alpha = A_\alpha B$, $OA_\alpha = 1$.

За нерівністю трикутника $OB + A_\alpha B > OA_\alpha$, тобто $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$, що й треба було довести.

Приклад 2. Чому дорівнює значення cosα, tgα та ctgα, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то:

$\frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1$, $\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$, $\cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Оскільки $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то cosα > 0, тобто $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Тоді: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 2\sqrt{2}$.

Відповідь. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $2\sqrt{2}$.

IV. Знаки тригонометричних функцій

Відомо, що осі декартової системи координат ділять координатну площину, а отже, і тригонометричне коло, на чотири чверті — при цьому:

1) усі кути $2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, належать першій чверті;

2) усі кути $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, належать другій чверті;

3) усі кути $\pi + 2\pi n < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, належать третій чверті;

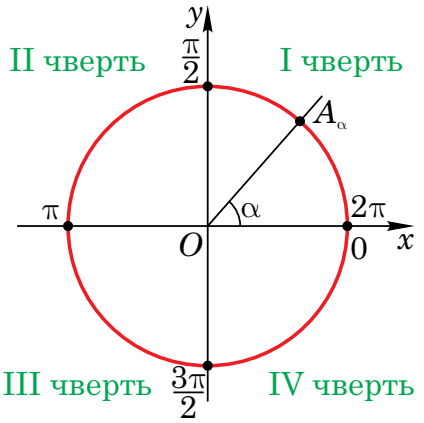
4) усі кути $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < 2\pi + 2\pi n$, $n \in Z$, належать четвертій чверті (див. рисунок).

1) Якщо точка A_α, яка відповідає куту α, міститься у першій чверті, то її абсциса і ордината додатні, тобто $\cos\alpha > 0$ і $\sin\alpha > 0$.

2) Якщо точка A_α, яка відповідає куту α, міститься у другій чверті, то її абсциса від'ємна, а ордината додатна, тобто $\cos\alpha < 0$ і $\sin\alpha > 0$.

3) Якщо точка A_α, яка відповідає куту α, міститься у третій чверті, то її абсциса і ордината від'ємні, тобто $\cos\alpha < 0$ і $\sin\alpha < 0$.

4) Якщо точка A_α, яка відповідає куту α, міститься у четвертій чверті, то її абсциса додатна, а ордината від'ємна, тобто $\cos\alpha > 0$ і $\sin\alpha < 0$.



Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тому $\operatorname{tg}\alpha > 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, коли $\cos\alpha$ та $\sin\alpha$ одного знака, тобто в I і III чвертях, і $\operatorname{tg}\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, коли $\cos\alpha$ та $\sin\alpha$ різних знаків, тобто в II і IV чвертях.

Приклад 3. Визначте знак виразу $\operatorname{tg} 3\alpha$, якщо $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Якщо $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$, то $\dfrac{\pi}{2} < 3\alpha < \pi$, тобто кут 3α — кут другої координатної чверті, тому $\operatorname{tg} 3\alpha < 0$.

Відповідь. $\operatorname{tg} 3\alpha < 0$.

11. Порівняйте $\cos 4$ і $\sin 7$.

Розв'язання.

1) $\pi < 4 < \dfrac{3\pi}{2}$ — кут 4 рад — кут третьої чверті, тому $\cos 4 < 0$.

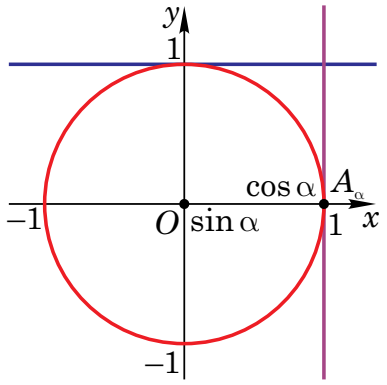
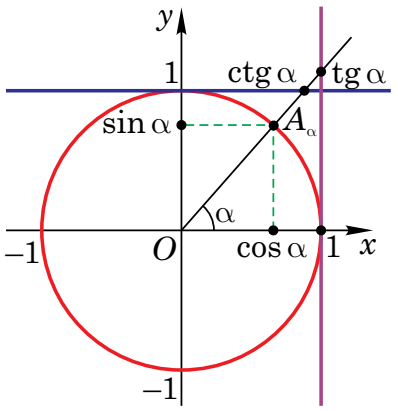
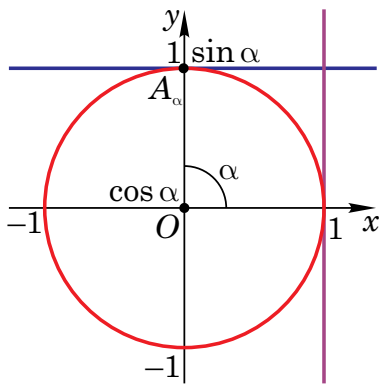
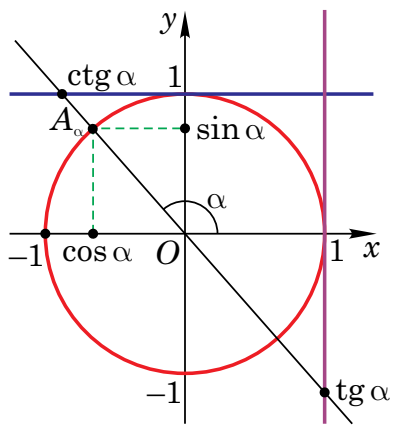
2) $2\pi < 7 < \dfrac{5\pi}{2}$ — кут 7 рад — кут першої чверті, тому $\sin 7 > 0$.

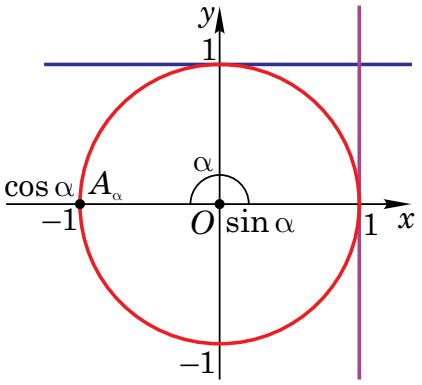
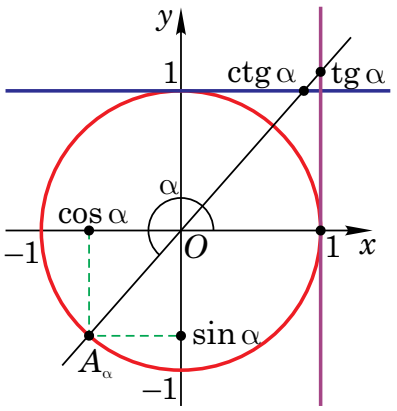
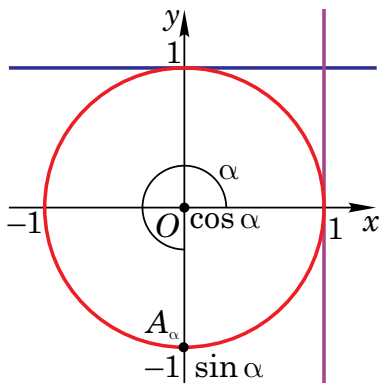
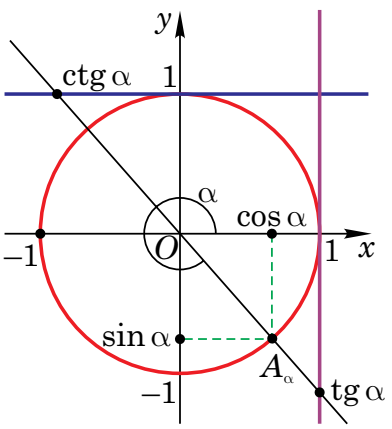
Отже, $\cos 4 < \sin 7$.

Відповідь. $\cos 4 < \sin 7$.

V. Зміна значень тригонометричних функцій при зміні кута в межах першого кола

Прослідкуємо, як змінюються тригонометричні функції при зростанні кута від 0 рад до 2π рад (див. таблицю).

Кут (у рад)	Рисунок	Пояснення
0		$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ — не існує.
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		При збільшенні кута α від 0 до $\frac{\pi}{2}$: — косинус зменшується від 1 до 0; — синус збільшується від 0 до 1; — тангенс збільшується від 0 до +∞; — котангенс зменшується від +∞ до 0.
$\frac{\pi}{2}$		$\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ — не існує, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$.
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$		При збільшенні кута α від $\frac{\pi}{2}$ до π: — косинус зменшується від 0 до –1; — синус зменшується від 1 до 0; — тангенс збільшується від –∞ до 0; — котангенс зменшується від 0 до –∞.

Кут (у рад)	Рисунок	Пояснення
π		$\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\operatorname{tg}\pi = 0$, $\operatorname{ctg}\pi$ — не існує.
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$		При збільшенні кута α від π до $\frac{3\pi}{2}$: — косинус збільшується від –1 до 0; — синус зменшується від 0 до –1; — тангенс збільшується від 0 до +∞; — котангенс зменшується від +∞ до 0.
$\frac{3\pi}{2}$		$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ — не існує, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = 0$.
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$		При збільшенні кута α від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π: — косинус збільшується від 0 до 1; — синус збільшується від –1 до 0; — тангенс збільшується від –∞ до 0; — котангенс зменшується від 0 до –∞.

Дослідити властивості тригонометричних функцій довільного кута можна за допомогою Geogebra-аплету:

https://www.geogebra.org/m/xpx8a2tq

Приклад 4. Знайдіть найбільше й найменше значення, яких може набувати вираз $1-4\cos\alpha$.

Розв'язання. $-1 \le \cos\alpha \le 1$, $-4 \le -4\cos\alpha \le 4$, $-4+1 \le -4\cos\alpha+1 \le 4+1$, $-3 \le -4\cos\alpha+1 \le 5$.

Отже, найбільше значення виразу дорівнює 5, а найменше: –3.

Відповідь. 5 та –3.

Історична довідка

Тригонометрія — це розділ математики, що виник ще в стародавні часи. Її розвиток зумовлений потребами астрономії. Саме в астрономії сферична тригонометрія з'явилася раніше, ніж геометрія на площині. Перші знання з тригонометрії з'явилися у Вавилоні та Стародавньому Єгипті, де жреці використовували їх для вимірювання земельних ділянок і передбачення астрономічних явищ.

Давньогрецький математик Гіппарх (II ст. до н. е.) уважається засновником тригонометрії. Він створив перші таблиці хорд, які є прообразом сучасних тригонометричних функцій. Надалі тригонометрію розвивали Клавдій Птолемей, Аріабхата та Бхаскара в Індії, а також перські й арабські вчені — Аль-Баттані та Омар Хаям.

У середньовічній Європі тригонометрія набула значного поширення завдяки працям арабських учених, перекладених латиною.

Назви ліній синуса і косинуса вперше були введені індійськими вченими. Також вони склали перші таблиці синусів, хоча ці таблиці були менш точними, ніж таблиці Птолемея. З Індії бере свій початок учення про тригонометричні величини. Таке вчення назвали «гоніометрією» (від «гоніо» — кут, «метріо» — вимірювати), яка й отримала пізніше назву «тригонометрія».

У сьогоденні тригонометрія використовується не лише в математиці, а й у фізиці, інженерії, навігації, комп'ютерній графіці та в багатьох інших сферах.

1) Що таке «рубаї»?

2) Хто написав такі рядки:

«Ти до зла не хились, а роби лиш добро!
Бо не зло тобі друг, а добро, лиш добро.
Якщо зло і добро тобі в друзі прибились,
Вибирай однозначно — добро, лиш добро!»?

VI. Розв'язування пратичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Пілот винищувача проходить тренування на центрифузі, яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с. Він сидить у кабіні, яка закріплена на кінці важеля довжиною, що дорівнює радіусу R обертання центрифуги, де $R = 7$ м. Початкове положення пілота відповідає точці $(R; 0)$ у декартовій системі координат, а центр центрифуги збігається з початком координат. Знайдіть загальні рівняння, за якими можна знайти координати кабіни в цій системі координат, у будь-який момент часу t та обчисліть координати кабіни через 40 с після початку руху.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C

Рівень A

1. Заповніть таблицю:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\operatorname{tg}\alpha$						
$\operatorname{ctg}\alpha$						

2. В якій координатній чверті всі тригонометричні функції додатні? Чи існує така чверть, у якій усі значення функцій — від'ємні?

3. Якщо кут належить трикутнику, то які тригонометричні функції цього кута можуть набувати від'ємних значень і коли саме?

4. Спростіть вираз:

1) $a\cdot\sin 0^\circ + b\cdot\cos 90^\circ + c\cdot\operatorname{tg}180^\circ$;
2) $a\cdot\operatorname{tg}0^\circ + b\cdot\operatorname{ctg}90^\circ$;
3) $a\cdot\cos 0^\circ + b\cdot\cos 180^\circ + c\cdot\cos 360^\circ$;
4) $a^2\cdot\sin\frac{\pi}{2} + 2ab\cdot\cos\pi - b^2\cdot\sin\frac{3}{2}\pi$.

5. Порівняйте з нулем:

1) $\cos 2$; 2) $\sin 3$; 3) $\operatorname{tg}4$; 4) $\operatorname{ctg}5$.

6. Визначте знак кожного з добутків:

1) $\sin 101^\circ\cdot\sin 133^\circ$;
2) $\cos 211^\circ\cdot\sin 116^\circ$;
3) $\operatorname{tg}111^\circ\cdot\sin 180^\circ$;
4) $\operatorname{ctg}300^\circ\cdot\sin 221^\circ$.

7. Визначте знак різниці:

1) $\sin 123^\circ - \sin 132^\circ$;
2) $\cos 35^\circ - \cos 40^\circ$;
3) $\operatorname{tg}220^\circ - \operatorname{tg}217^\circ$;
4) $\operatorname{ctg}304^\circ - \operatorname{ctg}316^\circ$.

8. Замініть вираз тотожно рівним йому, змінивши знак кута на протилежний:

1) $\cos(-15^\circ)$;
2) $\operatorname{ctg}(-235^\circ)$;
3) $\operatorname{tg}(\alpha - 160^\circ)$;
4) $\sin(\alpha - 40^\circ)$.

9. Які знаки мають $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, якщо α дорівнює:

1) $\frac{\pi}{5}$; 2) $1{,}3\pi$; 3) $\frac{7}{16}\pi$; 4) $\frac{6}{17}\pi$?

10. Збільшується чи зменшується значення $\cos x$ при збільшенні кута x від 0 до 1,5? А при збільшенні x від 1,5 до π?

Рівень B

1. Визначте, при яких значеннях x, таких, що $0 \le x < 2\pi$, функція $y = \sin x - \cos x$:

1) дорівнює нулю;
2) набуває додатних значень;
3) набуває від'ємних значень;
4) дорівнює 1.

2. Чи можуть тригонометричні функції половини кута трикутника бути від'ємними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{\sin 90^\circ} - 2ab \cdot \sin 180^\circ + \frac{b^2}{\sin 270^\circ}$; 2) $a^3 \cdot \operatorname{ctg} 270^\circ + b^3 \cdot \operatorname{tg} 90^\circ$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення, яких може набувати вираз $\frac{1}{4} + 2\cos\alpha$.

5. Порівняйте:

1) $\sin 20^\circ$ і $\cos 20^\circ$; 2) $\sin 50^\circ$ і $\cos 50^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 40^\circ$ і $\operatorname{ctg} 40^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 50^\circ$ і $\operatorname{ctg} 50^\circ$.

6. Визначте знак кожного з добутків:

1) $\sin 119^\circ \cdot \cos 119^\circ \cdot \operatorname{tg} 119^\circ$; 2) $\cos 312^\circ \cdot \sin 312^\circ \cdot \operatorname{ctg} 312^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 111^\circ \cdot \operatorname{ctg} 182^\circ \cdot \sin 359^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 123^\circ \cdot \sin 321^\circ \cdot \cos 213^\circ$.

7. Визначте знак різниці:

1) $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$; 2) $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 31^\circ - \operatorname{ctg} 131^\circ$.

8. Визначте знак виразу:

1) $\sin 1 \cdot \cos(-1{,}5) \cdot \operatorname{tg} 4 \cdot \operatorname{ctg} 6{,}2$; 2) $\operatorname{ctg} 1{,}7 \cdot \sin(-2) \cdot \cos 6 \cdot \operatorname{tg} 2{,}5$.

9. Нехай $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Порівняйте з нулем число:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\cos(\pi + \alpha)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Розмістіть у порядку спадання числа: $\sin 0$, $\cos 0$, $\sin 1$, $\cos 1$, $\sin 2$, $\cos 3$.

Рівень С

1. Яких значень від 0° до 360° може набувати кут α, щоб виконувалось співвідношення $\cos 150^\circ > \cos\alpha$?

2. Знайдіть найбільше і найменше значення, яких може набувати вираз $10 - 7\cos^2\alpha$.

3. При яких значеннях x вираз $\frac{1}{1 - \cos x}$ набуває найменшого значення? Знайдіть це значення.

4. Доведіть, що будь-яка хорда тригонометричного кола виражається подвоєним синусом половини центрального кута, який спирається на цю хорду.

5. Якщо сторона правильного десятикутника, вписаного в коло з одиничним радіусом, дорівнює $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, то обчисліть $\sin 18^\circ$.

6. Не користуючись калькулятором, знайдіть значення виразу:

1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$; 2) $\sin\frac{17\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\frac{21\pi}{13}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{12} + 1$.

7. Не користуючись калькулятором, розташуйте числа в порядку зростання:
1) $\cos 1000°$, $\sin 1000°$, $\mathrm{tg}\,1000°$;
2) $\cos 2900°$, $\sin 2900°$, $\mathrm{ctg}\,2900°$.

8. Порівняйте:
1) $\mathrm{tg}\,1500°$ і $\mathrm{tg}\,1501°$;
2) $\sin 1300°$ і $\sin 1301°$;
3) $\cos 1700°$ і $\cos 1699°$;
4) $\mathrm{ctg}\,1750°$ і $\mathrm{ctg}\,1751°$.

9. Визначте знак виразу:
1) $(\mathrm{tg}\,3 - \mathrm{ctg}\,7)\cdot\cos 2\cdot\sin 4$;
2) $(\sin 6 - \cos 6)\cdot\mathrm{tg}\,4\cdot\mathrm{ctg}\,2$.

10. Визначте знак виразу:
1) $\cos 3\alpha$, якщо $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\mathrm{tg}\,3\alpha$, якщо $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$;
3) $\sin\frac{\alpha}{4}$, якщо $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$;
4) $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $2\pi < \alpha < 3\pi$.

Рефлексія

1. Я розумію, що таке синус та косинус довільного кута.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я знаю, як позначати синус та косинус на тригонометричному колі.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я знаю означення тангенса і котангенса довільного кута.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я знаю, як позначати тангенси й котангенси на відповідних осях тангенсів та котангенсів.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я знаю основні властивості тригонометричних функцій.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я умію визначати знаки тригонометричних функцій у кожній з координатних чвертей.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

7. Я знаю, як змінюються тригонометричні функції при збільшенні кута від 0 рад до 2π рад.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

8. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми проєктів

1. Історія виникнення тригонометричних функцій.
2. Застосування тригонометричних функцій у фізиці.
3. Використання тригонометричних функцій у комп'ютерній графіці.
4. Тригонометричні функції в акустиці.
5. Полярна система координат.
6. Сферична тригонометрія.
7. Перетворення Фур'є та застосування тригонометричних функцій для аналізу радіосигналів.