10 Тема 6. Тригонометричні функції

Урок 3. Означення тригонометричних функцій центрального кута

План уроку

1. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса.
2. Знаки тригонометричних функцій.
3. Зміна значень тригонометричних функцій при зміні кута в межах першого кола.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує комплексну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1-1];

оцінює вірогідність даних [12 МАО 1.2.2-2];

розрізняє форми подачі інформації математичного змісту (текст, графік, аудіо, відео тощо) [12 МАО 2.1.1-1];

упорядковує інформацію математичного змісту [12 МАО 2.1.3-1];

самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в комплексній проблемній ситуації, їхню вірогідність [12 МАО 3.1.1-1];

досліджує та доводить математичні твердження [12 МАО 4.1.2-2];

визначає можливості застосування відомих математичних фактів і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.

2) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

4) Історичні відомості пропонуйте учням/ученицям на домашнє опрацювання.

5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

7) Заплануйте проведення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичної задачі і тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

8) Під час розв'язання задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачі, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Темами проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали рівень А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як обчислювати значення тригонометричних функцій для від'ємних кутів?

2) Чи змінюватиметься поведінка тригонометричних функцій, якщо кут буде більшим за 360°?

3) Чому тригонометричні функції важливі в комп'ютерній графіці?

4) Для опису яких процесів ви використали б тригонометричні функції?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Запишіть координати точки, що відповідають куту $\frac{\pi}{6}$ при повороті точки $A(1;\ 0)$ на цей кут.

Відповідь. $A_{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2. В якій координатній чверті знаходиться точка, абсциса і ордината якої від'ємні числа?

Відповідь. У третій.

3. Розв'яжіть рівняння $x^4 = 81$.

Відповідь. –3 або 3.

4. Спростіть вираз $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.

Відповідь. $\sqrt{x}$.

5. Розв'яжіть нерівність $\frac{x-3}{x+4} \le 0$.

Відповідь. $(-4; 3]$.

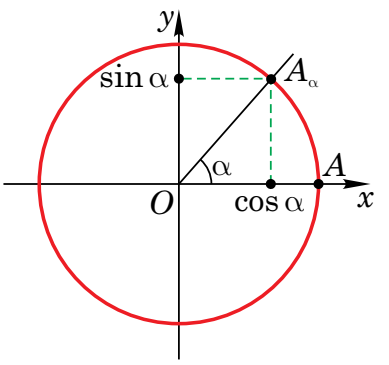
Як я вирішую певну проблему?

Задача. Пілот винищувача проходить тренування на центрифузі, яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с. Він сидить у кабіні, яка закріплена на кінці важеля довжиною, що дорівнює радіусу R обертання центрифуги, де $R = 7$ м. Початкове положення пілота відповідає точці $(R; 0)$ у декартовій системі координат, а центр центрифуги збігається з початком координат. Знайдіть загальні рівняння, за якими можна знайти координати кабіни в цій системі координат, у будь-який момент часу t та обчисліть координати кабіни через 40 с після початку руху.

III. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса (10–15 хв)

Тригонометричні функції – це важливі математичні поняття, які відіграють ключову роль у математиці, оскільки дозволяють не лише описувати співвідношення між сторонами та кутами трикутників й інших геометричних фігур, а також допомагають аналізувати періодичні процеси. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса можна розширити за допомогою тригонометричного кола. Це дає змогу застосовувати тригонометричні функції не тільки в геометрії, а й у фізиці, техніці, астрономії та в інших науках.

Означення. Ординату точки A_α, яка відповідає куту α повороту точки $A(1; 0)$, називають *синусом* кута α (позначають $\sin\alpha$), а абсцису точки A_α називають ***косинусом*** кута α (позначають $\cos\alpha$) (див. рисунок).



Властивості синуса та косинуса

1. Для будь-якого кута абсциса та ордината точки A_α не можуть бути більшими за 1 чи меншими від -1, тому завжди будуть правильними такі нерівності: $-1 \le \sin\alpha \le 1$ та $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

2. Кутам α та β, для яких виконується рівність $\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка на тригонометричному колі, тому $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$ і $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Кутам α та $-\alpha$ відповідають точки на тригонометричному колі, симетричні відносно осі Ox, тому $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ та $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

4. Кутам α та $\alpha + \pi$ відповідають діаметрально протилежні точки на тригонометричному колі, тобто точки, симетричні відносно початку координат, тому $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ і $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

5. Оскільки координати усіх точок, які належать тригонометричному колу, задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Означення. Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

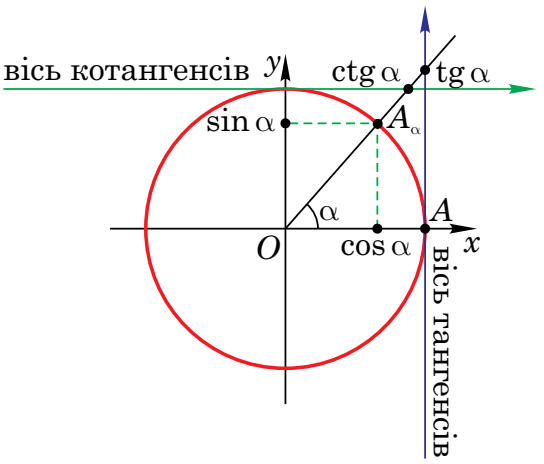
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Безпосередньо з означень тангенса та котангенса випливає, що для будь-якого кута α, такого, що $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, є правильними рівності:

1) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.



Запишемо рівняння прямої OA_α, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки ця пряма не вертикальна і завжди проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $y = kx$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої (див. рисунок).

Оскільки пряма проходить через точку $A_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, то $\sin\alpha = k\cos\alpha$, звідси $k = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. Тобто рівняння прямої $y = (\operatorname{tg}\alpha)\cdot x$. Пряма $y = (\operatorname{tg}\alpha)\cdot x$ перетинає пряму $x = 1$ у точці з координатами $(1;\ \operatorname{tg}\alpha)$, а пряму $y = 1$ — у точці $(\operatorname{ctg}\alpha;\ 1)$ (див. рисунок).

Властивості тангенса й котангенса

№	Властивість	Доведення
1.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, виконується рівність $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.	$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$.
2.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, виконується рівність $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$.
3.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, виконується рівність $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \frac{\sin(\alpha - \pi)}{\cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

№	Властивість	Доведення
4.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, виконується рівність $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \frac{\cos(\alpha - \pi)}{\sin(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$. $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.
5.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, виконується рівність $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.	1) Для $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi m) = \frac{\sin(\alpha + 2\pi m)}{\cos(\alpha + 2\pi m)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. 2) Для $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{tg}(\alpha + \pi(2m+1)) = \frac{\sin(\alpha + \pi + 2\pi m)}{\cos(\alpha + \pi + 2\pi m)} =$ $= \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.
6.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, виконується рівність $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.	1) Для $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi m) = \frac{\cos(\alpha + 2\pi m)}{\sin(\alpha + 2\pi m)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$. 2) Для $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi(2m+1)) = \frac{\cos(\alpha + \pi + 2\pi m)}{\sin(\alpha + \pi + 2\pi m)} =$ $= \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

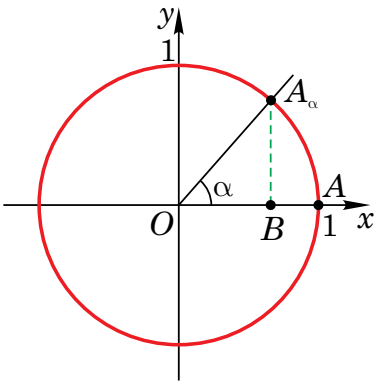
Ілюстративні приклади

6. Доведіть, що для кута $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

Доведення. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Оскільки кут α — гострий, то $\cos\alpha = OB$ та $\sin\alpha = A_\alpha B$, $OA_\alpha = 1$.

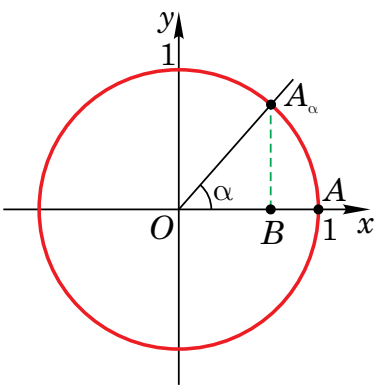
За нерівністю трикутника $OB + A_\alpha B > OA_\alpha$, тобто $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$, що й треба було довести.



7. Доведіть, що для кута $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\alpha > \sin\alpha$.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Для кутів $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, α — довжина дуги AA_α, $\sin\alpha = A_\alpha B$. Оскільки довжина дуги більша за довжину хорди AA_α, яка стягує цю дугу, а $AA_\alpha > A_\alpha B$ (гіпотенуза більша за катет), отже, $\alpha > \sin\alpha$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



8. Чому дорівнює значення cosα, tgα та ctgα, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то:

$\frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1$, $\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$, $\cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Оскільки $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то cosα > 0, тобто $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Тоді: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 2\sqrt{2}$.

Відповідь. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $2\sqrt{2}$.

IV. Знаки тригонометричних функцій

1) Чи можуть тангенс і котангенс одного кута мати різні знаки?

2) Чи бувають ситуації, коли достатньо знати знак тригонометричної функції без значення функції?

3) Чи можуть усі тригонометричні функції одночасно бути від'ємними?

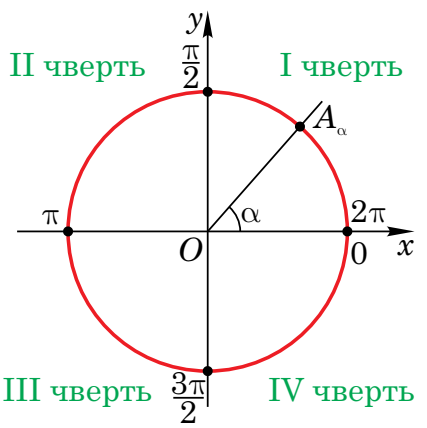
Відомо, що осі декартової системи координат ділять координатну площину, а отже, і тригонометричне коло, на чотири чверті — при цьому:

1) усі кути $2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, належать першій чверті;

2) усі кути $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, належать другій чверті;

3) усі кути $\pi + 2\pi n < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, належать третій чверті;

4) усі кути $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < 2\pi + 2\pi n$, $n \in Z$, належать четвертій чверті (див. рисунок).



1) Якщо точка A_α, яка відповідає куту α, міститься у першій чверті, то її абсциса і ордината додатні, тобто cosα > 0 і sinα > 0.

2) Якщо точка A_α, яка відповідає куту α, міститься у другій чверті, то її абсциса від'ємна, а ордината додатна, тобто cosα < 0 і sinα > 0.

3) Якщо точка A_α, яка відповідає куту α, міститься у третій чверті, то її абсциса і ордината від'ємні, тобто cosα < 0 і sinα < 0.

4) Якщо точка A_α, яка відповідає куту α, міститься у четвертій чверті, то її абсциса додатна, а ордината від'ємна, тобто cosα > 0 і sinα < 0.

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тому tgα > 0 і ctgα > 0, коли cosα та sinα одного знака, тобто в I і III чвертях, і tgα < 0 і ctgα < 0, коли cosα та sinα різних знаків, тобто в II і IV чвертях.

Ілюстративні приклади

9. Порівняйте з нулем значення виразу: $\sin 0{,}4\pi \cdot \cos 0{,}9\pi \cdot \operatorname{tg}\frac{10\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$.

Розв'язання.

1) $0 < 0{,}4\pi < \frac{\pi}{2}$, оскільки 0,4π — кут першої чверті, тому $\sin 0{,}4\pi > 0$.

2) $\frac{\pi}{2} < 0{,}9\pi < \pi$, оскільки 0,9π — кут другої чверті, тому $\cos 0{,}9\pi < 0$.

3) $\frac{10\pi}{3} = 3\pi + \frac{\pi}{3}$ — кут третьої чверті, тому $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3} > 0$.

4) $-\frac{8\pi}{7} = -\pi - \frac{\pi}{7}$ — кут другої чверті, тому $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{7}\right) < 0$.

5) Отже, $\sin 0{,}4\pi \cdot \cos 0{,}9\pi \cdot \operatorname{tg}\frac{10\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > 0$.

Відповідь. $\sin 0{,}4\pi \cdot \cos 0{,}9\pi \cdot \operatorname{tg}\frac{10\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > 0$.

10. Визначте знак виразу tg3α, якщо $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Якщо $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{2} < 3\alpha < \pi$, тобто кут 3α — кут другої координатної чверті, тому tg3α < 0.

Відповідь. tg3α < 0.

11. Порівняйте $\cos 4$ і $\sin 7$.

Розв'язання.

1) $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$ — кут 4 рад — кут третьої чверті, тому cos4 < 0.

2) $2\pi < 7 < \frac{5\pi}{2}$ — кут 7 рад — кут першої чверті, тому sin7 > 0.

Отже, cos4 < sin7.

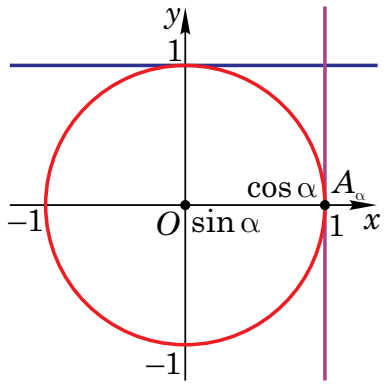
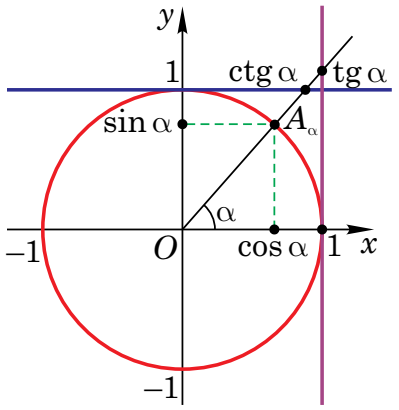
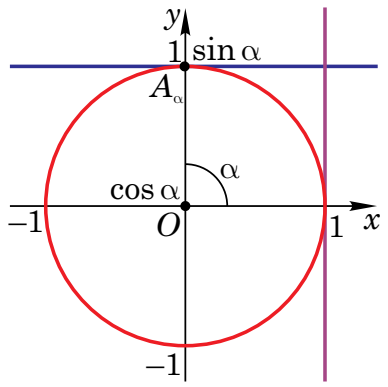
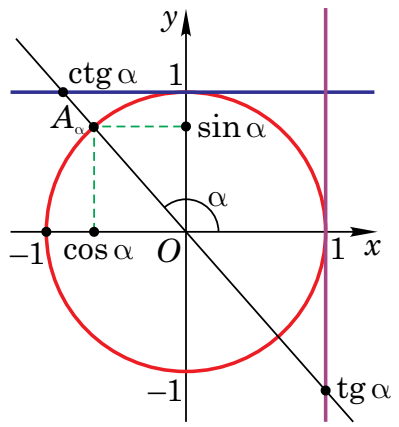
Відповідь. cos4 < sin7.

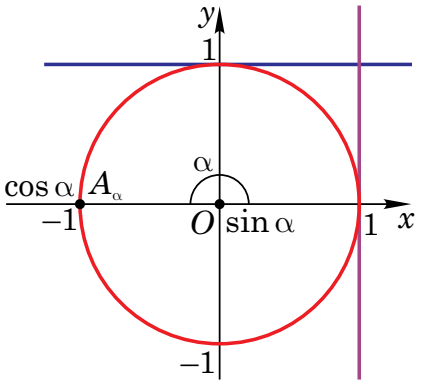
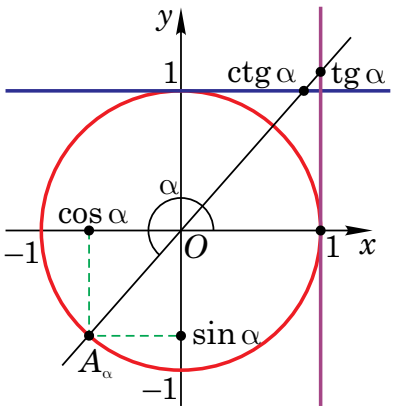
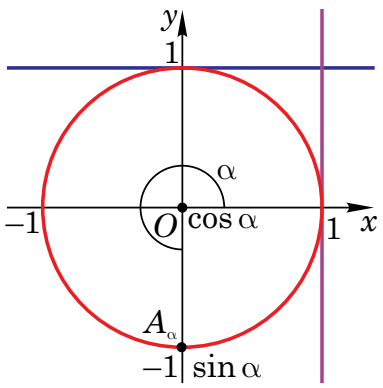
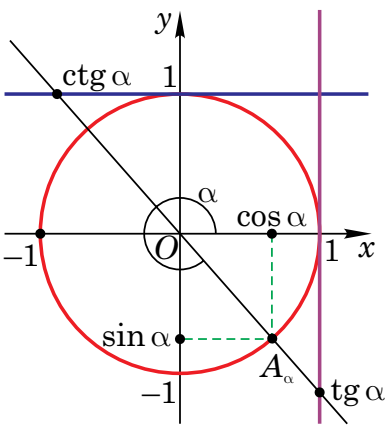
V. Зміна значень тригонометричних функцій при зміні кута в межах першого кола (7–9 хв)

Чи можна використати зміну значень тригонометричних функцій для опису коливань або інших періодичних процесів?

Відповідь. Так.

Прослідкуємо, як змінюються тригонометричні функції при зростанні кута від 0 рад до 2π рад (див. таблицю).

Кут (у рад)	**Рисунок**	**Пояснення**
0		$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ — не існує.
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		При збільшенні кута α від 0 до $\frac{\pi}{2}$: — косинус зменшується від 1 до 0; — синус збільшується від 0 до 1; — тангенс збільшується від 0 до $+\infty$; — котангенс зменшується від $+\infty$ до 0.
$\frac{\pi}{2}$		$\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ — не існує, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$.
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$		При збільшенні кута α від $\frac{\pi}{2}$ до π: — косинус зменшується від 0 до –1; — синус зменшується від 1 до 0; — тангенс збільшується від $-\infty$ до 0; — котангенс зменшується від 0 до $-\infty$.

Кут (у рад)	Рисунок	Пояснення
π		$\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\operatorname{tg}\pi = 0$, $\operatorname{ctg}\pi$ — не існує.
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$		При збільшенні кута α від π до $\frac{3\pi}{2}$: — косинус збільшується від –1 до 0; — синус зменшується від 0 до –1; — тангенс збільшується від 0 до +∞; — котангенс зменшується від +∞ до 0.
$\frac{3\pi}{2}$		$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ — не існує, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = 0$.
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$		При збільшенні кута α від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π: — косинус збільшується від 0 до 1; — синус збільшується від –1 до 0; — тангенс збільшується від –∞ до 0; — котангенс зменшується від 0 до –∞.

Дослідити властивості тригонометричних функцій довільного кута можна за допомогою Geogebra-аплету:

https://www.geogebra.org/m/xpx8a2tq

Ілюстративні приклади

12. В яких чвертях, зі збільшенням кута α, sinα та cosα одночасно зменшуються?

Розв'язання. Користуючись таблицею або тригонометричним колом, установлюємо, що sinα та cosα одночасно зменшуються тоді, коли кут збільшується та знаходиться у другій координатній чверті.

Відповідь. У другій.

13. Знайдіть найбільше й найменше значення, яких може набувати вираз $1-4\cos\alpha$.

Розв'язання. $-1 \le \cos\alpha \le 1$, $-4 \le -4\cos\alpha \le 4$, $-4+1 \le -4\cos\alpha+1 \le 4+1$, $-3 \le -4\cos\alpha+1 \le 5$.

Отже, найбільше значення виразу дорівнює 5, а найменше: –3.

Відповідь. 5 та –3.

Історична довідка

Тригонометрія — це розділ математики, що виник ще в стародавні часи. Її розвиток зумовлений потребами астрономії. Саме в астрономії сферична тригонометрія з'явилася раніше, ніж геометрія на площині. Перші знання з тригонометрії з'явилися у Вавилоні та Стародавньому Єгипті, де жреці використовували їх для вимірювання земельних ділянок і передбачення астрономічних явищ.

Давньогрецький математик Гіппарх (II ст. до н. е.) уважається засновником тригонометрії. Він створив перші таблиці хорд, які є прообразом сучасних тригонометричних функцій. Надалі тригонометрію розвивали Клавдій Птолемей, Аріабхата та Бхаскара в Індії, а також перські й арабські вчені — Аль-Баттані та Омар Хаям.

У середньовічній Європі тригонометрія набула значного поширення завдяки працям арабських учених, перекладених латиною.

Назви ліній синуса і косинуса вперше були введені індійськими вченими. Також вони склали перші таблиці синусів, хоча ці таблиці були менш точними, ніж таблиці Птолемея. З Індії бере свій початок учення про тригонометричні величини. Таке вчення назвали «гоніометрією» (від «гоніо» — кут, «метріо» — вимірювати), яка й отримала пізніше назву «тригонометрія».

У сьогоденні тригонометрія використовується не лише в математиці, а й у фізиці, інженерії, навігації, комп'ютерній графіці та в багатьох інших сферах.

1) Що таке «рубаї»?

2) Хто написав такі рядки:

«Ти до зла не хились, а роби лиш добро!
Бо не зло тобі друг, а добро, лиш добро.
Якщо зло і добро тобі в друзі прибились,
Вибирай однозначно — добро, лиш добро!»?

Запропонуйте учням/ученицям проєкт-дослідження творчості Омара Хаяма.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Пілот винищувача проходить тренування на центрифузі, яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с. Він сидить у кабіні, яка закріплена на кінці важеля довжиною, що дорівнює радіусу R обертання центрифуги, де $R = 7$ м. Початкове положення пілота відповідає точці $(R; 0)$ у декартовій системі координат, а центр центрифуги збігається з початком координат. Знайдіть загальні рівняння, за якими можна знайти координати кабіни в цій системі координат, у будь-який момент часу t та обчисліть координати кабіни через 40 с після початку руху.

Розв'язання. 1) Кут α, який проходить центрифуга за час t, — $\alpha = \omega t$.
2) Якщо вибрати одиничне коло, яке має спільний центр із центром центрифуги, то це коло подібне до кола, з радіусом R та коефіцієнтом подібності R, де $R = 7$ м.
Точка, що знаходиться на одиничному колі, має координати $(\cos\alpha; \sin\alpha)$.
Тоді точка, яка лежить на центрифузі, має координати $(R\cos\alpha; R\sin\alpha)$.
3) За 40 с кабіна центрифуги пройде кут $\alpha = \frac{80\pi}{3}$ рад.

Таким чином, координати кабіни будуть $\left(7\cos\frac{80\pi}{3}; 7\sin\frac{80\pi}{3}\right)$.

Виділимо повні оберти кабіни й обчислимо косинус та синус кута α:

$$\frac{80\pi}{3} = 26\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad \cos\frac{80\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{80\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, координати кабіни центрифуги: $\left(-\frac{7}{2}; \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$.

Відповідь. $\left(-\frac{7}{2}; \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (8–10 хв)

Рівень A

1. Заповніть таблицю:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\operatorname{tg}\alpha$						
$\operatorname{ctg}\alpha$						

2. В якій координатній чверті всі тригонометричні функції додатні? Чи існує така чверть, у якій усі значення функцій — від'ємні?

3. Якщо кут належить трикутнику, то які тригонометричні функції цього кута можуть набувати від'ємних значень і коли саме?

4. Спростіть вираз:

1) $a \cdot \sin 0° + b \cdot \cos 90° + c \cdot \mathrm{tg} 180°$;
2) $a \cdot \mathrm{tg} 0° + b \cdot \mathrm{ctg} 90°$;
3) $a \cdot \cos 0° + b \cdot \cos 180° + c \cdot \cos 360°$;
4) $a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \cos \pi - b^2 \cdot \sin \frac{3}{2}\pi$.

5. Порівняйте з нулем:

1) $\cos 2$; 2) $\sin 3$; 3) $\mathrm{tg}\, 4$; 4) $\mathrm{ctg}\, 5$.

6. Визначте знак кожного з добутків:

1) $\sin 101° \cdot \sin 133°$;
2) $\cos 211° \cdot \sin 116°$;
3) $\mathrm{tg} 111° \cdot \sin 180°$;
4) $\mathrm{ctg} 300° \cdot \sin 221°$.

7. Визначте знак різниці:

1) $\sin 123° - \sin 132°$;
2) $\cos 35° - \cos 40°$;
3) $\mathrm{tg} 220° - \mathrm{tg} 217°$;
4) $\mathrm{ctg} 304° - \mathrm{ctg} 316°$.

8. Замініть вираз тотожно рівним йому, змінивши знак кута на протилежний:

1) $\cos(-15°)$;
2) $\mathrm{ctg}(-235°)$;
3) $\mathrm{tg}(\alpha - 160°)$;
4) $\sin(\alpha - 40°)$.

9. Які знаки мають $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, якщо α дорівнює:

1) $\frac{\pi}{5}$; 2) $1{,}3\pi$; 3) $\frac{7}{16}\pi$; 4) $\frac{6}{17}\pi$?

10. Збільшується чи зменшується значення $\cos x$ при збільшенні кута x від 0 до 1,5? А при збільшенні x від 1,5 до π?

Рівень В

1. Визначте, при яких значеннях x, таких, що $0 \le x < 2\pi$, функція $y = \sin x - \cos x$:

1) дорівнює нулю;
2) набуває додатних значень;
3) набуває від'ємних значень;
4) дорівнює 1.

2. Чи можуть тригонометричні функції половини кута трикутника бути від'ємними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{\sin 90°} - 2ab \cdot \sin 180° + \frac{b^2}{\sin 270°}$;
2) $a^3 \cdot \mathrm{ctg} 270° + b^3 \cdot \mathrm{tg} 90°$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення, яких може набувати вираз $\frac{1}{4} + 2\cos\alpha$.

5. Порівняйте:

1) $\sin 20°$ і $\cos 20°$;
2) $\sin 50°$ і $\cos 50°$;
3) $\mathrm{tg} 40°$ і $\mathrm{ctg} 40°$;
4) $\mathrm{tg} 50°$ і $\mathrm{ctg} 50°$.

6. Визначте знак кожного з добутків:

1) $\sin 119° \cdot \cos 119° \cdot \mathrm{tg} 119°$;
2) $\cos 312° \cdot \sin 312° \cdot \mathrm{ctg} 312°$;
3) $\mathrm{tg} 111° \cdot \mathrm{ctg} 182° \cdot \sin 359°$;
4) $\mathrm{ctg} 123° \cdot \sin 321° \cdot \cos 213°$.

7. Визначте знак різниці:

1) $\sin 120° - \sin 240°$;
2) $\cos 20° - \cos 120°$;
3) $\operatorname{tg} 120° - \operatorname{tg} 40°$;
4) $\operatorname{ctg} 31° - \operatorname{ctg} 131°$.

8. Визначте знак виразу:

1) $\sin 1 \cdot \cos(-1{,}5) \cdot \operatorname{tg} 4 \cdot \operatorname{ctg} 6{,}2$;
2) $\operatorname{ctg} 1{,}7 \cdot \sin(-2) \cdot \cos 6 \cdot \operatorname{tg} 2{,}5$.

9. Нехай $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Порівняйте з нулем число:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;
2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\cos(\pi + \alpha)$;
4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Розмістіть у порядку спадання числа: $\sin 0$, $\cos 0$, $\sin 1$, $\cos 1$, $\sin 2$, $\cos 3$.

Рівень С

1. Яких значень від 0° до 360° може набувати кут α, щоб виконувалось співвідношення $\cos 150° > \cos\alpha$?

2. Знайдіть найбільше і найменше значення, яких може набувати вираз $10 - 7\cos^2\alpha$.

3. При яких значеннях x вираз $\frac{1}{1 - \cos x}$ набуває найменшого значення? Знайдіть це значення.

4. Доведіть, що будь-яка хорда тригонометричного кола виражається подвоєним синусом половини центрального кута, який спирається на цю хорду.

5. Якщо сторона правильного десятикутника, вписаного в коло з одиничним радіусом, дорівнює $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, то обчисліть $\sin 18°$.

6. Не користуючись калькулятором, знайдіть значення виразу:

1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$;
2) $\sin\frac{17\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\frac{21\pi}{13}$;
4) $\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{12} + 1$.

7. Не користуючись калькулятором, розташуйте числа в порядку зростання:

1) cos1000°, sin1000°, tg1000°;
2) cos2900°, sin2900°, ctg2900°.

8. Порівняйте:

1) tg1500° і tg1501°;
2) sin1300° і sin1301°;
3) cos1700° і cos1699°;
4) ctg1750° і ctg1751°.

9. Визначте знак виразу:

1) $(\operatorname{tg} 3 - \operatorname{ctg} 7) \cdot \cos 2 \cdot \sin 4$;
2) $(\sin 6 - \cos 6) \cdot \operatorname{tg} 4 \cdot \operatorname{ctg} 2$.

10. Визначте знак виразу:

1) $\cos 3\alpha$, якщо $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\operatorname{tg} 3\alpha$, якщо $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$;
3) $\sin\frac{\alpha}{4}$, якщо $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$;
4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $2\pi < \alpha < 3\pi$.

VIII. Рефлексія (2 хв)

1. Я розумію, що таке синус та косинус довільного кута.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я знаю, як позначати синус та косинус на тригонометричному колі.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я знаю означення тангенса і котангенса довільного кута.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я знаю, як позначати тангенси й котангенси на відповідних осях тангенсів та котангенсів.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я знаю основні властивості тригонометричних функцій.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я умію визначати знаки тригонометричних функцій у кожній з координатних чвертей.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

7. Я знаю, як змінюються тригонометричні функції при збільшенні кута від 0 рад до 2π рад.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

8. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми учнівських проєктів

1. Історія виникнення тригонометричних функцій.
2. Застосування тригонометричних функцій у фізиці.
3. Використання тригонометричних функцій у комп'ютерній графіці.
4. Тригонометричні функції в акустиці.
5. Полярна система координат.
6. Сферична тригонометрія.
7. Перетворення Фур'є та застосування тригонометричних функцій для аналізу радіосигналів.