

Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Урок 6. Урок-практикум. Розв'язування задач. Ортогональне проєктування

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

пригадаєте основні означення, ознаки та властивості перпендикулярності прямих і площин у просторі;

відпрацюєте навички обчислення відстаней у просторі;

навчитеся обчислювати площу ортогональної проєкції плоскої фігури на горизонтальну площину і проведете дослідження практичного значення ортогональної проєкції;

застосуєте набуті знання до розв'язання прикладних задач.

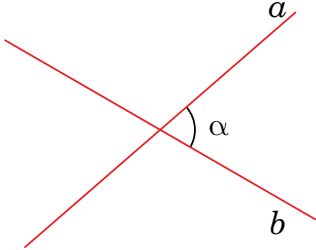
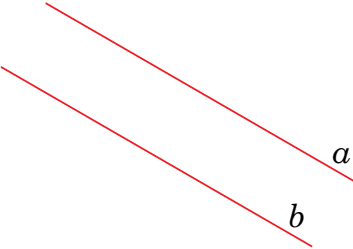
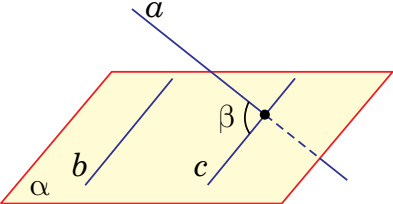
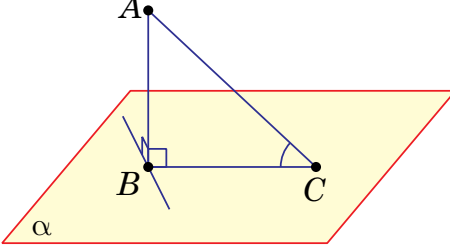
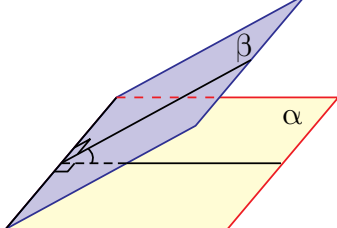
II. Повторення

1. Кути у просторі

Повторимо деякі означення.

Означення 1. Дві прямі в просторі називаються *мимобіжними*, якщо вони не лежать в одній площині.

Означення 2. Двогранним кутом називається геометрична фігура, яка складається з двох півплощин — граней двогранного кута зі спільною прямою перетину площин (ребром двогранного кута).

Кут між геометричними фігурами	Графічна ілюстрація
1. Кутом між прямими, що перетинаються, називається найменший із кутів, які утворились у результаті перетину.	 $\angle(a, b) = \alpha$
2. Кут між паралельними прямими дорівнює 0°.	 $a \parallel b, \angle(a, b) = 0^\circ$
3. Кутом між мимобіжними прямими, називається кут між прямими, що перетинаються та паралельні до даних мимобіжних прямих.	 a і b — мимобіжні, $b \parallel c$, $\angle\beta$ — кут між мимобіжними прямими a і b.
4. Кутом між прямою й площиною, яка перетинає дану пряму і не перпендикулярна до прямої, називається кут між прямою та її проекцією на площину.	 $AB \perp \alpha$, AC — похила, BC — проекція похилої, $\angle ACB$ — кут між прямою AC й площиною α.
5. Кутом між двома площинами, що перетинаються, називається найменший із двограних кутів, утворених у результаті їхнього перетину.	

2. Відстані у просторі

Відстань	Графічна ілюстрація
1. Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини.	
2. Відстанню від прямої до паралельної їй площини, називається відстань від будь-якої точки даної прямої до даної площини.	
3. Відстанню між двома паралельними площинами називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини, тобто довжина їхнього спільного перпендикуляра.	
4. Відстанню між мимобіжними прямими, називається довжина їхнього спільного перпендикуляра.	

Приклад 1. Із вершини A рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляр AD до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки D до сторони BC , якщо $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Оскільки трикутник ABC — рівносторонній, то $AB = BC = AC$. Відстань від точки D до сторони BC — довжина відрізка DE , де точка E — основа висоти AE . При цьому точка E є серединою відрізка BC .

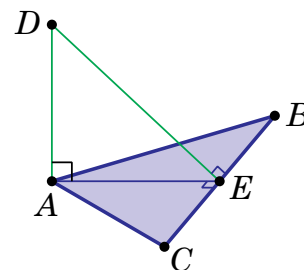
Тоді для прямокутного трикутника AEC :

$$AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

3) Розглянемо прямокутний трикутник DAE :

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{169 + 27} = \sqrt{196} = 14 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 14 см.



III. Ортогональне проектування

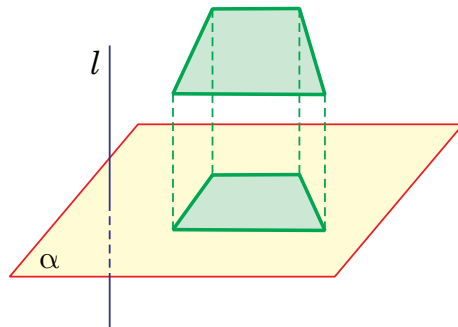
Розглянемо паралельне проектування чотирикутника в напрямку прямої l , перпендикулярної до площини проєкції α . Для цього з вершин чотирикутника проведемо прямі, які паралельні прямій l .

Такий спосіб проектування називається *ортогональним проектуванням*.

Ортогональною проєкцією точки є основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини проєкції, а ортогональною проєкцією фігури — множина проєкцій усіх її точок на дану площину.

Якщо площина багатокутника не перпендикулярна до площини проєкції, то ортогональна проєкція багатокутника є також багатокутником.

Залежність між площами багатокутника та його ортогональною проєкцією на площину визначає теорема.



Теорема. Площа ортогональної проєкції $S_{\text{пр}}$ багатокутника на площину дорівнює добутку площі багатокутника S на косинус кута φ між площиною багатокутника і площиною проєкції, тобто $S_{\text{пр}} = S \cdot \cos \varphi$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок проектування трикутника на площину α , яка містить одну з його сторін (див. рисунок). Нехай $BB_1 \perp \alpha$, трикутник AB_1C — ортогональна проєкція трикутника ABC на площину α .

Проведемо похилу BH так, що $BH \perp AC$. Оскільки B_1H — проєкція похилої BH на площину α , то, за теоремою про три перпендикуляри, $B_1H \perp AC$.

Отже, $\angle BHB_1$ — кут між площинами трикутника ABC і його ортогональної проєкції — трикутника AB_1C . За умовою, $\angle BHB_1 = \varphi$.

Із трикутника BB_1H ($\angle B_1 = 90^\circ$): $B_1H = BH \cos \varphi$.

Тоді $S_{\Delta AB_1C} = \frac{1}{2} B_1H \cdot AC = \frac{1}{2} BH \cdot AC \cdot \cos \varphi = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \varphi$.

Отже, для окремого випадку теореми доведено.

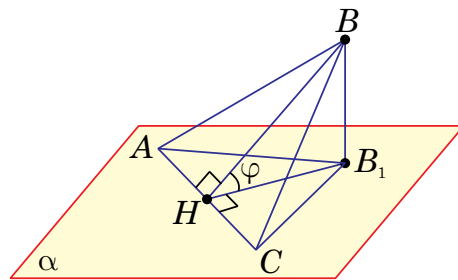
Теорема справджується й тоді, коли площина проєкції паралельна площині α . У цьому випадку $\cos \varphi = \cos 0^\circ = 1$ і $S_{\Delta AB_1C} = S_{\Delta ABC}$.

У загальному випадку, багатокутник можна розбити на скінченну кількість трикутників, кожний із яких має сторону, паралельну площині проєкції і рівні кути між даними трикутниками та площиною проєкції.

Якщо площі таких трикутників дорівнюють $S_1, S_2, \dots, S_k$, то їхні проєкції мають площі $S_1 \cdot \cos \varphi, S_2 \cdot \cos \varphi, \dots, S_k \cdot \cos \varphi$ відповідно.

Таким чином, площа проєкції багатокутника:

$$S_{\text{пр}} = S_1 \cdot \cos \varphi + S_2 \cdot \cos \varphi + \dots + S_k \cdot \cos \varphi = (S_1 + S_2 + \dots + S_k) \cdot \cos \varphi = S \cdot \cos \varphi.$$



Приклад 2. Ортогональною проекцією прямокутника, сторона якого належить площині проекції, є квадрат. Знайдіть кут між площинами прямокутника і квадрата, якщо сторони прямокутника дорівнюють 6 см і $3\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. Нехай квадрат AB_1C_1D — ортогональна проекція прямокутника $ABCD$ на площину α (див. рисунок).

Площа прямокутника: $S_{ABCD} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (см²).

Квадрат і прямокутник мають спільну сторону AD .

Якщо $AD = 6$ см, то площа квадрата дорівнює 36 см².

Оскільки $36 > 18\sqrt{3}$, а площа спроектованої фігури не може бути більшою за площу багатокутника, то сторона квадрата не може дорівнювати 6 см.

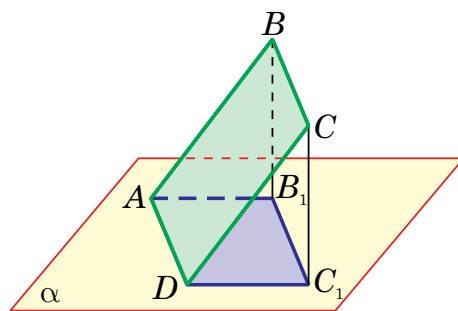
Отже, $AD = 3\sqrt{3}$, а площа квадрата становить 27 см².

За формулою площі ортогональної проекції багатокутника:

$S_{AB_1C_1D} = S_{ABCD} \cdot \cos \varphi$, де φ — шуканий кут.

Отже, $\cos \varphi = \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}}$, $\cos \varphi = \frac{27}{18\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, звідси $\varphi = 30^\circ$, бо $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Відповідь. 30° .



IV. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Біля кав'ярні встановлено прямокутний тент зі сторонами 2 м і 3 м із міцної водонепроникної тканини. Тент нахилено під кутом 30° до площини землі. Власник кав'ярні хоче дізнатись, яку площу займатиме тінь від тенту опівдні, коли сонце перебуває в зеніті. Цю інформацію він планує використати для розміщення столиків у тіні.

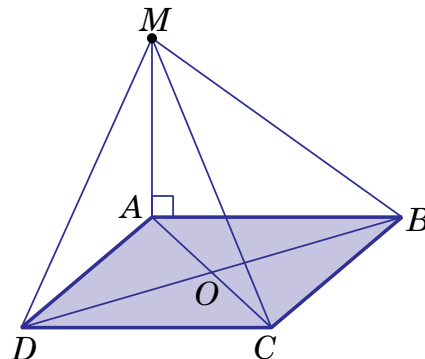
1. Обчисліть площу ортогональної проекції тенту на горизонтальну площину.
2. Скільки столиків із розмірами $0,8 \text{ м} \times 0,8 \text{ м}$ можна розмістити у тіні від тенту?
3. Яку частину становить площа тенту від його тіні на землі?
4. Як зміниться площа тіні, якщо кут нахилу тенту збільшити до 45° ?

Примітка. Для зручності відвідувачів кав'ярні між столиками має бути певний простір. Тому обчислену кількість столиків потрібно зменшити вдвічі.

V. Тренувальні вправи та задачі. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. До площини квадрата $ABCD$ із точки M проведено перпендикуляр MA . Скільки на рисунку прямокутних трикутників, однією з вершин яких є точка M ?



2. До площини правильного трикутника ABC , сторона якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см, проведено перпендикуляр AM , завдовжки 4 см. Знайдіть відстань від точки M до сторони BC .
3. До площини прямокутного трикутника ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 5$ см, проведено перпендикуляр MB так, що $MA = 13$ см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AC .
4. Трапеція вписана в коло так, що менша її основа, яка дорівнює 16 см, стягує дугу 60° , а на відстані 12 см від площини трапеції міститься точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини трапеції.
5. Відрізок AB , довжина якого 15 см, спирається своїми кінцями на дві паралельні площини. Знайдіть відстань між площинами, якщо проекція даного відрізка на одну з площин дорівнює 12 см.
6. Основа рівнобедреного трикутника паралельна площині α , а його ортогональна проекція на дану площину є рівностороннім трикутником, зі стороною 6 см. Знайдіть кут між площинами трикутників, якщо бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює $3\sqrt{5}$ см.
7. Ортогональною проекцією квадрата, одна з діагоналей якого паралельна площині проекції, є ромб. Знайдіть кут між площинами ромба й квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 2 см, а одна з діагоналей ромба становить $\sqrt{2}$ см.
8. Основою господарського приміщення є прямокутник, площа якого становить 54 м^2 . Знайдіть площу двосхилого даху приміщення, якщо схили даху утворюють з горизонтальною площиною кути по 30° . Урахуйте, що площа частини даху, який виступає за межі площини прямокутника основи, дорівнює 5% від площі всього даху.

Рівень В

1. Із точки M до площини β проведено перпендикуляр MO та похилі MA і MB . Довжини похилих відповідно дорівнюють 13 см і 20 см. Довжина проекції похилої MA дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки M до площини β .
2. Через точку O — точку перетину діагоналей квадрата $ABCD$ — проведено до його площини перпендикуляр MO завдовжки 15 см. Знайдіть відстань від точки M до сторін квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 16 см.

3. Прямі AB і CD перпендикулярні до площини α і перетинають площину в точках B і D відповідно. Знайдіть AC , якщо $AB = 9$ см, $CD = 15$ см, $BD = 8$ см а відрізок AC не перетинає площину α .
4. Із вершини A гострого кута ромба $ABCD$, у якого $AB = BD = 2$ см, проведено перпендикуляр AK до площини ромба так, що $AK = 1$ см. Знайдіть довжину похилої KC .
5. Із вершини A правильного трикутника ABC зі стороною $8\sqrt{3}$ см проведено відрізок AM завдовжки 5 см, перпендикулярний до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки M до прямої BC .
6. Ортогональною проекцією ромба на площину, що містить одну з його вершин, є квадрат. Знайдіть кут між площинами ромба і квадрата, якщо діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 12 см.

Рівень С

1. До площини прямокутника $ABCD$, площа якого дорівнює 180 см^2 а $CD = 20$ см, проведено перпендикуляр SD , завдовжки 12 см. Знайдіть відстань від точки S до сторони AB прямокутника.
2. Із точки M , яка не належить площині α , проведено до площини α перпендикуляр MO і похилі MA та MB так, що $MO = 5$ см, $MA = \sqrt{61}$ см, $MB = 13$ см. Знайдіть відношення проєкцій похилих.
3. Прямокутна трапеція з гострим кутом 45° і більшою бічною стороною, яка дорівнює $6\sqrt{2}$ см, належить площині α . На відстані 4 см від площини α міститься точка, рівновіддалена від кожної сторони трапеції. Знайдіть відстань від цієї точки до сторін трапеції.
4. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Деяка точка поза ромбом віддалена від усіх його сторін на 8 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини ромба.
5. Із точки до площини проведено дві похилі завдовжки 35 см і 75 см. Проекції цих похилих на площину відносяться, як 7 : 18. Знайдіть відстань від даної точки до площини.
6. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 48 см, а її гострий кут становить 60° . Точка простору, яка рівновіддалена від усіх сторін трапеції, міститься на відстані 3 см від площини трапеції. Знайдіть відстань від цієї точки до сторін трапеції.
7. Ортогональною проекцією рівностороннього трикутника, площа якого дорівнює $36\sqrt{3} \text{ см}^2$, на площину, що містить одну з його вершин, є рівнобедрений трикутник із бічною стороною $3\sqrt{13}$ см. Знайдіть кут між площинами трикутників.
8. Ортогональною проекцією рівнобічної трапеції з висотою 12 см та основами 4 см і 9 см на площину, паралельну основам трапеції, є чотирикутник, у який можна вписати коло. Знайдіть кут між площинами трапеції та її проєкції на площину.

Рефлексія

1) Що з сьогоднішнього уроку мені може знадобитися в житті?

.....
.....
.....

2) Яка задача була для мене найбільш практичною, і чому?

.....
.....
.....

3) В яких професіях потрібні знання про перпендикулярні площини, мимобіжні прямі та відстані у просторі?

.....
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Розміщення супутникових антен: дослідження оптимального кута нахилу антен до площини горизонту.
2. Створення 3D-моделі будівлі із застосування перпендикулярності для проектування поверхів будівлі.
3. Оцінка освітлення у приміщенні: аналіз кута падіння світла як проєкції від джерела світла на площину.
4. Вимірювання висоти будівлі за допомогою проєкцій: геометричне визначення відстаней через ортогональну проєкцію.
5. Дослідження просторових фігур у дизайні логотипів і в 3D-друці.







