

10

Тема 7.

Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Урок 6. Урок-практикум. Розв'язування задач. Ортогональне проєктування

План уроку

1. Повторення ознак перпендикулярності прямих і площин у просторі.
2. Ортогональне проєктування.
3. Розв'язування задач.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє комплексні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1-1];

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки комплексних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2-1];

розпізнає неповну і надлишкову інформацію, маніпулювання даними, визначає надійність джерел [12 МАО 1.2.1-2];

розрізняє форми подачі інформації математичного змісту (текст, графік, аудіо, відео тощо) [12 МАО 2.1.1-1];

упорядковує інформацію математичного змісту [12 МАО 2.1.3-1];

відображає результати розв'язання проблемної ситуації в різноманітних формах, зокрема із використанням інформаційних технологій [12 МАО 2.4.1-2];

самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в комплексній проблемній ситуації та їхню вірогідність [12 МАО 3.1.1-1];

визначає, аналізує й узагальнює зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу [12 МАО 4.1.1-1];

досліджує та доводить математичні твердження [12 МАО 4.1.2-2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання, які допоможуть пригадати вивчений матеріал. Заохочуйте проводити аналогії з матеріалом вивчених тем.
- 2) Сформулюйте практичну задачу прикладного характеру без розв'язання. Розв'язання задачі учні/учениці виконують наприкінці уроку в групах.
- 3) Розпочніть урок із короткого повторення ключових понять. Запропонуйте учням/ученицям розв'язати кілька ілюстративних задач для актуалізації знань.
- 4) Під час узагальнення подавайте теоретичні твердження стисло, зосереджуючи увагу на головному.
- 5) Доведення тверджень виконуйте, якщо вважаєте за потрібне.
- 6) Сплануйте частину уроку для практичних завдань, а саме: для групового розв'язання прикладної задачі та виконання індивідуальних тренувальних вправ.
- 7) Наголошуйте на важливості точності побудов, коректного оформлення розв'язань, дотримання правил позначень при зображенні просторових фігур і взаємного розміщення площин.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до створення проєктів. Можливі теми проєктів запропоновано.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) У будівництві мостів важливо розміщувати опори під прямими кутами до поверхонь. Як знання з геометрії допомагають це зробити?
- 2) Чи потрібно дизайнерам меблів або інтер'єру враховувати мимобіжні прямі? Як визначити відстані між ними?
- 3) Коли будується ліфтова шахта у багатоповерхівці, як перевірити, що стіни шахти вертикальні й перпендикулярні до площини?
- 4) Чи впливає точність побудови перпендикулярних площин на безпеку конструкцій?

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Біля кав'ярні встановлено прямокутний тент зі сторонами 2 м і 3 м із міцної водонепроникної тканини. Тент нахилено під кутом 30° до площини землі. Власник кав'ярні хоче дізнатись, яку площу займатиме тінь від тенту опівдні, коли сонце перебуває в зеніті. Цю інформацію він планує використати для розміщення столиків у тіні.

1. Обчисліть площу ортогональної проєкції тенту на горизонтальну площину.
2. Скільки столиків із розмірами $0,8 \text{ м} \times 0,8 \text{ м}$ можна розмістити у тіні від тенту?
3. Яку частину становить площа тенту від його тіні на землі?
4. Як зміниться площа тіні, якщо кут нахилу тенту збільшити до 45° ?

Примітка. Для зручності відвідувачів кав'ярні між столиками має бути певний простір. Тому обчислену кількість столиків потрібно зменшити вдвічі.

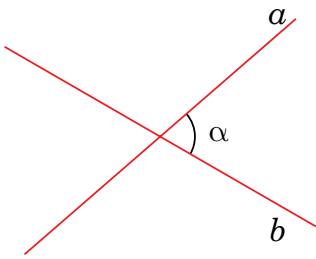
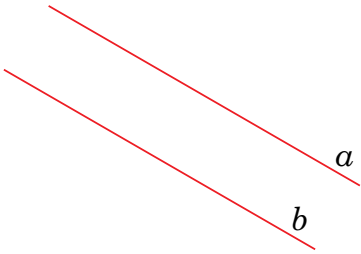
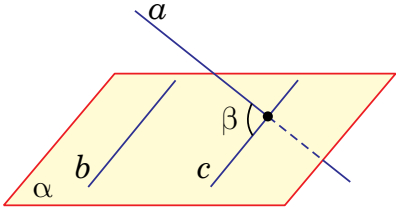
II. Повторення

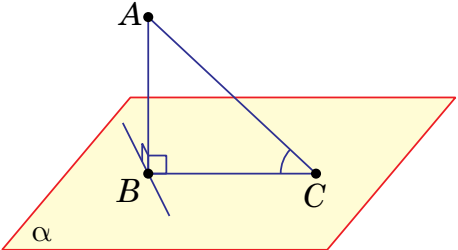
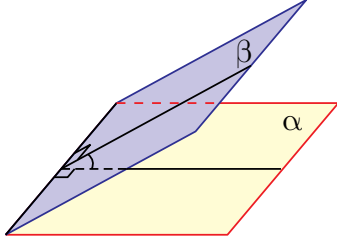
1. Кути у просторі

Повторимо деякі означення.

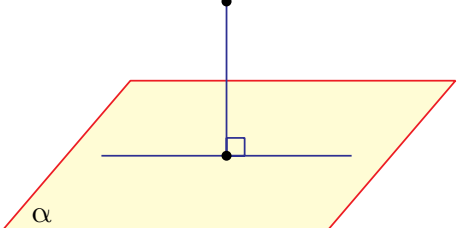
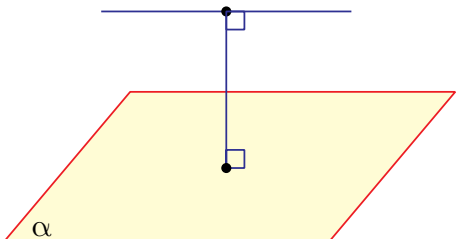
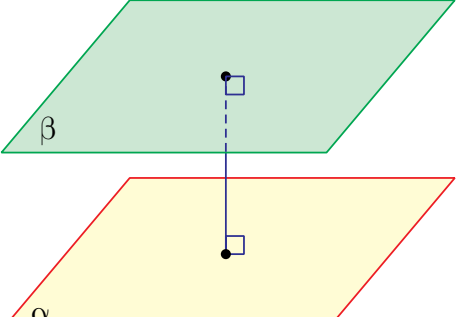
Означення 1. Дві прямі в просторі називаються **мимобіжними**, якщо вони не лежать в одній площині.

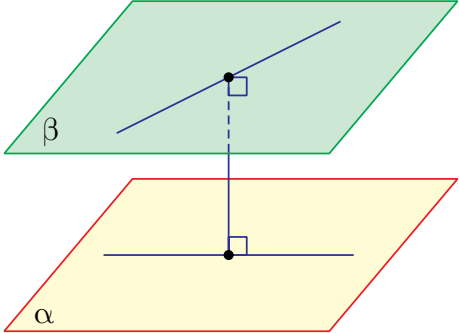
Означення 2. Двогранним кутом називається геометрична фігура, яка складається з двох півплощин — граней двогранного кута зі спільною прямою перетину площин (ребром двогранного кута).

Кут між геометричними фігурами	Графічна ілюстрація
1. Кутом між прямими, що перетинаються, називається найменший із кутів, які утворились у результаті перетину.	 $\angle(a, b) = \alpha$
2. Кут між паралельними прямими дорівнює 0° .	 $a \parallel b, \angle(a, b) = 0^\circ$
3. Кутом між мимобіжними прямими, називається кут між прямими, що перетинаються та паралельні до даних мимобіжних прямих.	 a і b — мимобіжні, $b \parallel c$, $\angle\beta$ — кут між мимобіжними прямими a і b.

Кут між геометричними фігурами	Графічна ілюстрація
4. Кутом між прямою й площиною, яка перетинає дану пряму і не перпендикулярна до прямої, називається кут між прямою та її проекцією на площину.	 $AB \perp \alpha$, AC — похила, BC — проекція похилої, $\angle ACB$ — кут між прямою AC й площиною α.
5. Кутом між двома площинами, що перетинаються, називається найменший із двограних кутів, утворених у результаті їхнього перетину.	

2. Відстані у просторі

Відстань	Графічна ілюстрація
1. Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини.	
2. Відстанню від прямої до паралельної їй площини, називається відстань від будь-якої точки даної прямої до даної площини.	
3. Відстанню між двома паралельними площинами називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини, тобто довжина їхнього спільного перпендикуляра.	

Відстань	Графічна ілюстрація
4. Відстанню між мимобіжними прямими, називається довжина їхнього спільного перпендикуляра.	

Ілюстративні задачі

1. Із вершини A рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляр AD до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки D до сторони BC , якщо $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Оскільки трикутник ABC — рівносторонній, то $AB = BC = AC$. Відстань від точки D до сторони BC — довжина відрізка DE , де точка E — основа висоти AE . При цьому точка E є серединою відрізка BC .

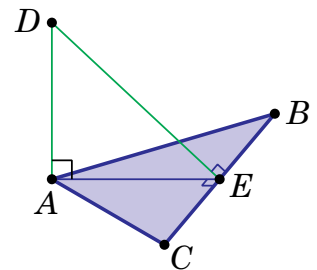
Тоді для прямокутного трикутника AEC :

$$AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

3) Розглянемо прямокутний трикутник DAE :

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{169 + 27} = \sqrt{196} = 14 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 14 см.

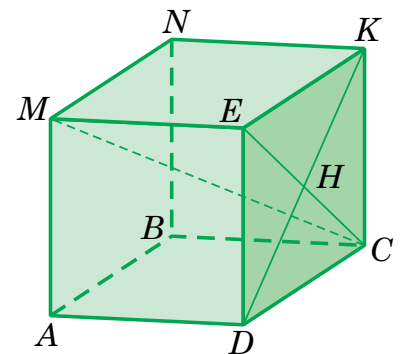


2. Дано куб $ABCDMNKE$ з ребром a (див. рисунок). Знайдіть відстань між прямими NK і MC .

Розв'язання. Спроектуємо пряму MC на площину (KCD) , яка перпендикулярна до прямої NK . Тоді EC — проекція прямої MC на зазначену площину. EC і KD — діагоналі квадрата, які перпендикулярні. Отже, відрізок KH — відстань між мимобіжними прямими NK і MC . Точка H — точка перетину діагоналей EC і KD квадрата.

Оскільки $KH = 0,5KD$, то $KH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.



III. Ортогональне проектування

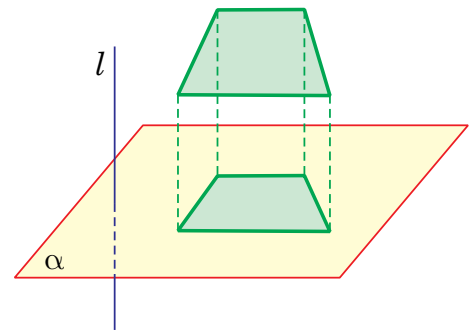
Розглянемо паралельне проектування чотирикутника в напрямку прямої l , перпендикулярної до площини проєкції α . Для цього з вершин чотирикутника проведемо прямі, які паралельні прямій l .

Такий спосіб проектування називається *ортогональним проектуванням*.

Ортогональною проекцією точки є основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини проєкції, а ортогональною проекцією фігури — множина проєкцій усіх її точок на дану площину.

Якщо площина багатокутника не перпендикулярна до площини проєкції, то ортогональна проєкція багатокутника є також багатокутником.

Залежність між площами багатокутника та його ортогональною проєкцією на площину визначає теорема.



Теорема. Площа ортогональної проєкції $S_{\text{пр}}$ багатокутника на площину дорівнює добутку площі багатокутника S на косинус кута φ між площиною багатокутника і площиною проєкції, тобто $S_{\text{пр}} = S \cdot \cos \varphi$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок проєктування трикутника на площину α , яка містить одну з його сторін (див. рисунок). Нехай $BB_1 \perp \alpha$, трикутник AB_1C — ортогональна проєкція трикутника ABC на площину α .

Проведемо похилу BH так, що $BH \perp AC$. Оскільки B_1H — проєкція похилої BH на площину α , то, за теоремою про три перпендикуляри, $B_1H \perp AC$.

Отже, $\angle BHB_1$ — кут між площинами трикутника ABC і його ортогональної проєкції — трикутника AB_1C . За умовою, $\angle BHB_1 = \varphi$.

Із трикутника BB_1H ($\angle B_1 = 90^\circ$): $B_1H = BH \cos \varphi$.

Тоді $S_{\Delta AB_1C} = \frac{1}{2} B_1H \cdot AC = \frac{1}{2} BH \cdot AC \cdot \cos \varphi = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \varphi$.

Отже, для окремого випадку теореми доведено.

Теорема справджується й тоді, коли площина проєкції паралельна площині α . У цьому випадку $\cos \varphi = \cos 0^\circ = 1$ і $S_{\Delta AB_1C} = S_{\Delta ABC}$.

У загальному випадку, багатокутник можна розбити на скінченну кількість трикутників, кожний із яких має сторону, паралельну площині проєкції і рівні кути між даними трикутниками та площиною проєкції.

Якщо площі таких трикутників дорівнюють $S_1, S_2, \dots, S_k$, то їхні проєкції мають площі $S_1 \cdot \cos \varphi, S_2 \cdot \cos \varphi, \dots, S_k \cdot \cos \varphi$ відповідно.

Таким чином, площа проєкції багатокутника:

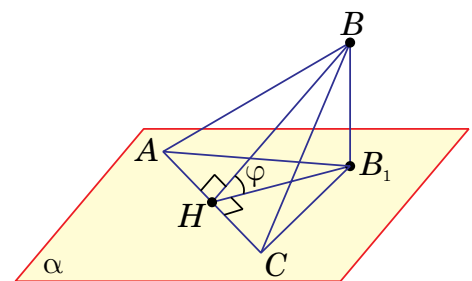
$$S_{\text{пр}} = S_1 \cdot \cos \varphi + S_2 \cdot \cos \varphi + \dots + S_k \cdot \cos \varphi = (S_1 + S_2 + \dots + S_k) \cdot \cos \varphi = S \cdot \cos \varphi.$$

Ілюстративна задача

- 3.** Ортогональною проєкцією прямокутника, сторона якого належить площині проєкції, є квадрат. Знайдіть кут між площинами прямокутника і квадрата, якщо сторони прямокутника дорівнюють 6 см і $3\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. Нехай квадрат AB_1C_1D — ортогональна проєкція прямокутника $ABCD$ на площину α (див. рисунок).

Площа прямокутника: $S_{ABCD} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (см²).



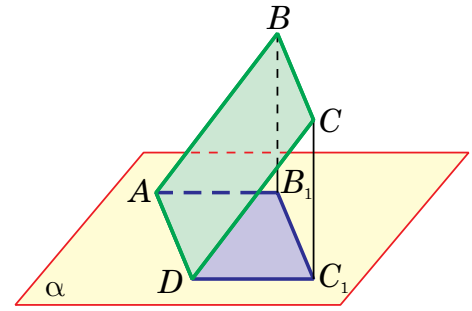
Квадрат і прямокутник мають спільну сторону AD . Якщо $AD = 6$ см, то площа квадрата дорівнює 36 см². Оскільки $36 > 18\sqrt{3}$, а площа спроектованої фігури не може бути більшою за площу багатокутника, то сторона квадрата не може дорівнювати 6 см. Отже, $AD = 3\sqrt{3}$, а площа квадрата становить 27 см².

За формулою площі ортогональної проекції багатокутника:

$$S_{AB_1C_1D} = S_{ABCD} \cdot \cos \varphi, \text{ де } \varphi \text{ — шуканий кут.}$$

$$\text{Отже, } \cos \varphi = \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}}, \cos \varphi = \frac{27}{18\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ звідси } \varphi = 30^\circ, \text{ бо } 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ.$$

Відповідь. 30° .



IV. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Біля кав'ярні встановлено прямокутний тент зі сторонами 2 м і 3 м із міцної водонепроникної тканини. Тент нахилено під кутом 30° до площини землі. Власник кав'ярні хоче дізнатись, яку площу займатиме тінь від тенту опівдні, коли сонце перебуває в zenіті. Цю інформацію він планує використати для розміщення столиків у тіні.

1. Обчисліть площу ортогональної проекції тенту на горизонтальну площину.
2. Скільки столиків із розмірами $0,8 \text{ м} \times 0,8 \text{ м}$ можна розмістити у тіні від тенту?
3. Яку частину становить площа тенту від його тіні на землі?
4. Як зміниться площа тіні, якщо кут нахилу тенту збільшити до 45° ?

Примітка. Для зручності відвідувачів кав'ярні між столиками має бути певний простір. Тому обчислену кількість столиків потрібно зменшити вдвічі.

Розв'язання.

1. Для того, щоб обчислити площу проекції тенту на площину землі, знайдемо площу тенту: $S_{\text{т}} = 2 \cdot 3 = 6$ (м²).

Оскільки $\varphi = 30^\circ$ — кут нахилу тенту до площини землі, то із формули $S_{\text{пр}} = S \cdot \cos \varphi$,

$$\text{маємо } S_{\text{пр}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \approx 5,2 \text{ (м}^2\text{)}.$$

2. Площа одного столика становить $0,8 \cdot 0,8 = 0,64$ (м²).

Тоді в тіні від тенту можна щільно розмістити $5,2 : 0,64 = 8,125$ столика, тобто 8 столиків.

Проте, зменшимо загальну кількість столиків удвічі. Отже, в тіні можна розмістити чотири столики.

3. Для того, щоб знайти, яку частину займає площа тента від площі його тіні, складемо пропорцію:

$$6 \text{ м}^2 \text{ — } x \%$$

$$5,2 \text{ м}^2 \text{ — } 100\%.$$

$$\text{Звідси } x = 600 : 5,2\% = 115,3\%.$$

4. Якщо $\varphi = 45^\circ$, то $S_{\text{пр}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \approx 4,2 \text{ (м}^2\text{)}$.

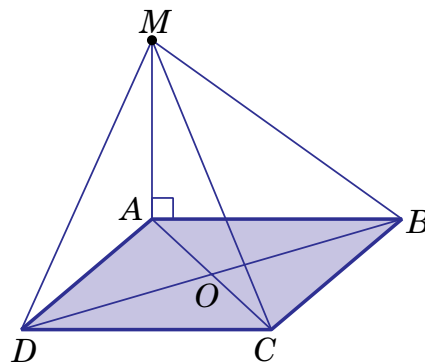
Тобто площа тіні зменшиться приблизно на 1 м^2 .

Відповідь. 1. $5,2 \text{ м}^2$. 2. 4 столики. 3. 115,3%. 4. Зменшиться приблизно на 1 м^2 .

V. Тренувальні вправи та задачі. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. До площини квадрата $ABCD$ із точки M проведено перпендикуляр MA . Скільки на рисунку прямокутних трикутників, однією з вершин яких є точка M ?



2. До площини правильного трикутника ABC , сторона якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см, проведено перпендикуляр AM , завдовжки 4 см. Знайдіть відстань від точки M до сторони BC .
3. До площини прямокутного трикутника ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 5$ см, проведено перпендикуляр MB так, що $MA = 13$ см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AC .
4. Трапеція вписана в коло так, що менша її основа, яка дорівнює 16 см, стягує дугу 60° , а на відстані 12 см від площини трапеції міститься точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини трапеції.
5. Відрізок AB , довжина якого 15 см, спирається своїми кінцями на дві паралельні площини. Знайдіть відстань між площинами, якщо проекція даного відрізка на одну з площин дорівнює 12 см.
6. Основа рівнобедреного трикутника паралельна площині α , а його ортогональна проекція на дану площину є рівностороннім трикутником, зі стороною 6 см. Знайдіть кут між площинами трикутників, якщо бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює $3\sqrt{5}$ см.
7. Ортогональною проекцією квадрата, одна з діагоналей якого паралельна площині проекції, є ромб. Знайдіть кут між площинами ромба й квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 2 см, а одна з діагоналей ромба становить $\sqrt{2}$ см.
8. Основою господарського приміщення є прямокутник, площа якого становить 54 м^2 . Знайдіть площу двосхилого даху приміщення, якщо схили даху утворюють з горизонтальною площиною кути по 30° . Урахуйте, що площа частини даху, який виступає за межі площини прямокутника основи, дорівнює 5% від площі всього даху.

Рівень В

1. Із точки M до площини β проведено перпендикуляр MO та похилі MA і MB . Довжини похилих відповідно дорівнюють 13 см і 20 см. Довжина проекції похилої MA дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки M до площини β .
2. Через точку O — точку перетину діагоналей квадрата $ABCD$ — проведено до його площини перпендикуляр MO завдовжки 15 см. Знайдіть відстань від точки M до сторін квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 16 см.
3. Прямі AB і CD перпендикулярні до площини α і перетинають площину в точках B і D відповідно. Знайдіть AC , якщо $AB = 9$ см, $CD = 15$ см, $BD = 8$ см а відрізок AC не перетинає площину α .
4. Із вершини A гострого кута ромба $ABCD$, у якого $AB = BD = 2$ см, проведено перпендикуляр AK до площини ромба так, що $AK = 1$ см. Знайдіть довжину похилої KC .
5. Із вершини A правильного трикутника ABC зі стороною $8\sqrt{3}$ см проведено відрізок AM завдовжки 5 см, перпендикулярний до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки M до прямої BC .
6. Ортогональною проекцією ромба на площину, що містить одну з його вершин, є квадрат. Знайдіть кут між площинами ромба і квадрата, якщо діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 12 см.

Рівень С

1. До площини прямокутника $ABCD$, площа якого дорівнює 180 см^2 а $CD = 20$ см, проведено перпендикуляр SD , завдовжки 12 см. Знайдіть відстань від точки S до сторони AB прямокутника.
2. Із точки M , яка не належить площині α , проведено до площини α перпендикуляр MO і похилі MA та MB так, що $MO = 5$ см, $MA = \sqrt{61}$ см, $MB = 13$ см. Знайдіть відношення проекцій похилих.
3. Прямокутна трапеція з гострим кутом 45° і більшою бічною стороною, яка дорівнює $6\sqrt{2}$ см, належить площині α . На відстані 4 см від площини α міститься точка, рівновіддалена від кожної сторони трапеції. Знайдіть відстань від цієї точки до сторін трапеції.
4. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Деяка точка поза ромбом віддалена від усіх його сторін на 8 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини ромба.
5. Із точки до площини проведено дві похилі завдовжки 35 см і 75 см. Проекції цих похилих на площину відносяться, як 7 : 18. Знайдіть відстань від даної точки до площини.
6. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 48 см, а її гострий кут становить 60° . Точка простору, яка рівновіддалена від усіх сторін трапеції, міститься на відстані 3 см від площини трапеції. Знайдіть відстань від цієї точки до сторін трапеції.
7. Ортогональною проекцією рівностороннього трикутника, площа якого дорівнює $36\sqrt{3}\text{ см}^2$, на площину, що містить одну з його вершин, є рівнобедрений трикутник із бічною стороною $3\sqrt{13}$ см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

8. Ортогональною проекцією рівнобічної трапеції з висотою 12 см та основами 4 см і 9 см на площину, паралельну основам трапеції, є чотирикутник, у який можна вписати коло. Знайдіть кут між площинами трапеції та її проекції на площину.

VI. Рефлексія «Одне запитання – одна відповідь».

Запропонуйте кожному учню письмово або усно відповісти на запитання 1) – 3).

1) Що з сьогоднішнього уроку мені може знадобитися в житті?

.....
.....
.....

2) Яка задача була для мене найбільш практичною, і чому?

.....
.....
.....

3) В яких професіях потрібні знання про перпендикулярні площини, мимобіжні прямі та відстані у просторі?

.....
.....
.....

Можливі теми учнівських проєктів

1. Розміщення супутникових антен: дослідження оптимального кута нахилу антен до площини горизонту.
2. Створення 3D-моделі будівлі із застосування перпендикулярності для проектування поверхів будівлі.
3. Оцінка освітлення у приміщенні: аналіз кута падіння світла як проекції від джерела світла на площину.
4. Вимірювання висоти будівлі за допомогою проекцій: геометричне визначення відстаней через ортогональну проекцію.
5. Дослідження просторових фігур у дизайні логотипів і в 3D-друці.