

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 10. Урок–практикум. Куля та сфера. Задачі на обчислення площі поверхні сфери та об'єму кулі

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

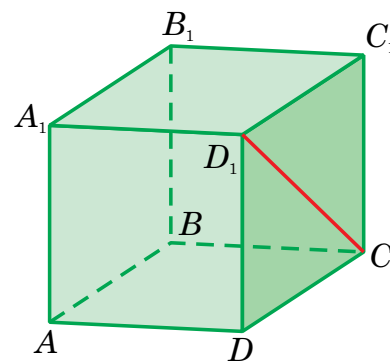
1) пригадаєте, як розв'язувати задачі на знаходження площі поверхні сфери;

2) повторите, як розв'язувати задачі на знаходження об'єму кулі;

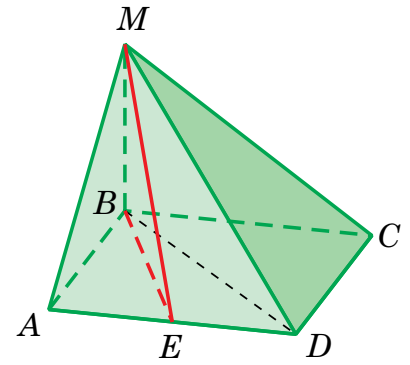
3) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування задач для підготовки до ЗНО/НМТ.

II. Повторення (Усно)

- Катет прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а косинус прилеглого до нього кута дорівнює 0,3. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
- На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть пряму, яка перпендикулярна до прямої CD_1 .
 - CD ;
 - AD ;
 - AC ;
 - DD_1 .
- Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 8 см.



4. Основою піраміди $MABCD$, зображеної на рисунку, є прямокутник, бічне ребро MB перпендикулярне до площини основи піраміди, точка E — середина ребра AD . Укажіть лінійний кут двогранного кута з ребром AD .



5. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є ромб зі стороною 6 см, а висота призми дорівнює 12 см.

III. Задачі на обчислення площі поверхні сфери

Площа сфери з радіусом R обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi R^2.$$

- Приклад 1.** Площина перетинає сферу. Довжина лінії перетину дорівнює 10π см, а діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину, утворює з площиною перетину кут 60° . Знайдіть площу поверхні сфери.

Розв'язання. Зобразимо на рисунку сферу з центром в точці O , радіус якої $R = OA$. Перерізом сфери і площини α є коло з центром O_1 і радіусом R_1 , де $R_1 = O_1A$, а діаметр AC (див. рисунок).

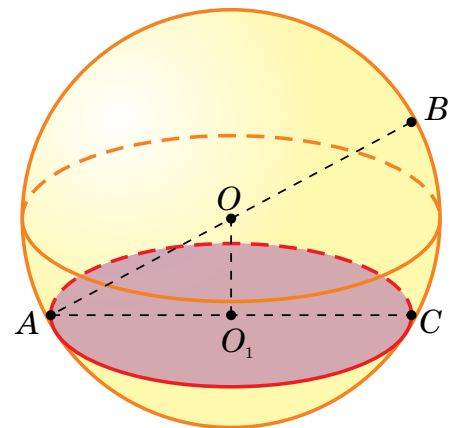
Довжина кола перетину $C = 2\pi R_1 = 10\pi$ см, звідки $R_1 = 5$ см, $AC = 10$ см.

Оскільки $OO_1 \perp AC$, то кут між діаметром сфери AB і площиною перетину є $\angle OAO_1 = 60^\circ$.

Розглянемо трикутник AOC : $AO = OC = R$ — радіуси сфери, тому трикутник AOC — рівносторонній, звідки $AC = OA = 10$ см.

Площа поверхні сфери $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi$ (см²).

Відповідь. 400π см².



- Приклад 2.** Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної в конус, твірна якого дорівнює l і утворює з основою кут α .

Розв'язання. Центр вписаної кулі K — точка перетину висоти SO конуса і бісектриси AK кута SAO .

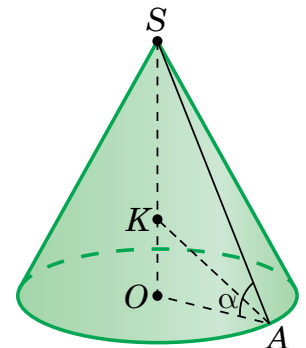
Із трикутника AKO маємо: $r = OK = OA \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Із трикутника SAO маємо: $OA = AS \cos \alpha = l \cos \alpha$.

Тоді $r = OA \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Отже, $S = 4\pi r^2 = 4\pi l^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $4\pi l^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.



IV. Задачі на обчислення об'єму кулі

Об'єм кулі з радіусом R обчислюється за формулою:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Приклад 3. У склянку циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок. Визначте відношення об'єму води, яка залишилась у склянці, до об'єму води, яка вилилася зі склянки. (ЗНО, 2008 р.).

Розв'язання. Нехай R — радіус кулі.

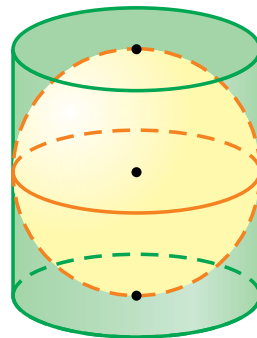
Висота циліндра дорівнює діаметру кулі, тобто $2R$. Радіус основи циліндра дорівнює радіусу кулі R .

$$\text{Об'єм кулі } V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$\text{Об'єм циліндра } V_2 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

$$\text{Знайдемо відношення } \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{2\pi R^3 - \frac{4}{3} \pi R^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{1}{2}.$$



Приклад 4. Об'єми двох куль відносяться, як $27 : 125$. Як відносяться площі їхніх поверхонь?

Розв'язання. Нехай R_1 і R_2 — радіуси двох куль. Відношення об'ємів двох куль дорівнює відношенню кубів радіусів, а відношення площ поверхонь двох куль дорівнює відношенню квадратів радіусів.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}; \quad \frac{3^3}{5^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{5}; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

$$\text{Відповідь. } 9 : 25.$$

Приклад 5. У середині кулі проведені дві паралельні площини з одного боку від її центра на відстані 3 см одна від одної. Ці площини дають у перерізі два малих круги, радіуси яких 9 см і 12 см. Обчисліть об'єм кулі.

Розв'язання. Нехай R — радіус даної кулі, O_1 і O_2 — центри кругів, що утворюються при перетині даних паралельних площин з кулею (див. рисунок).

$$\text{Нехай } OO_2 = x.$$

Виразимо квадрати радіуса кулі з трикутників AO_1O і DO_2O і прирівняємо їх:

$$12^2 + x^2 = 9^2 + (3 + x)^2,$$

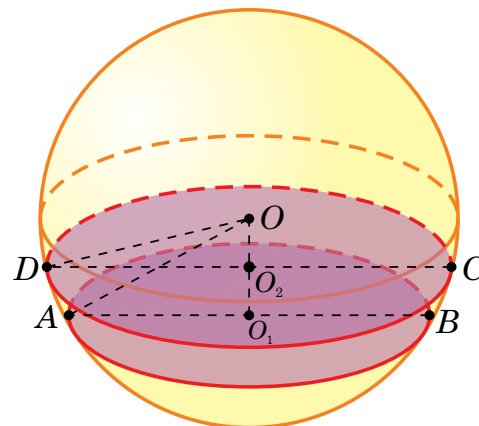
$$144 + x^2 = 81 + 9 + 6x + x^2, \quad 6x = 54, \quad x = 9.$$

Знайдемо радіус кулі:

$$R = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = 15.$$

$$\text{Об'єм кулі } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 15^3 = 4500\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$\text{Відповідь. } 4500\pi \text{ см}^3.$$

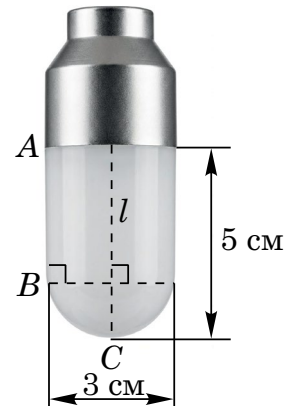


V. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На рисунку зображено осьовий переріз світлодіодної лампи. Активна поверхня цієї лампи, через яку відбувається випромінювання світла, є тілом обертання, утвореним обертанням відрізка AB та чверті кола BC навколо осі l . Використовуючи зазначені на рисунку дані, обчисліть площу активної поверхні світлодіодної лампи. Виберіть відповідь, найближчу до точної. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
39 см^2	42 см^2	45 см^2	48 см^2	51 см^2



VI. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С

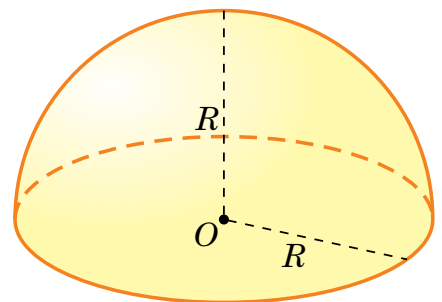
Рівень А

1. Укажіть формулу для визначення радіуса R сфери, площа поверхні якої дорівнює S . (ЗНО, 2020 р.).

А	Б	В	Г	Д
$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$	$R = \sqrt{\frac{4\pi}{S}}$	$R = \sqrt{4\pi S}$	$R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$	$R = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$

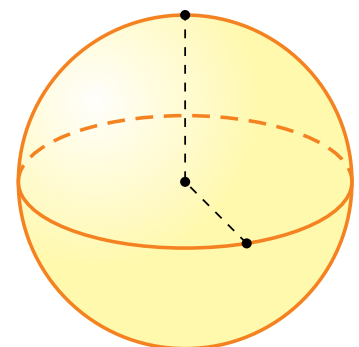
2. Укажіть формулу для обчислення об'єму V півкулі з радіусом R (див. рисунок). (ЗНО, 2018 р.).

А	Б	В	Г	Д
$V = 4\pi R^2$	$V = \frac{2}{3}\pi R^3$	$V = \pi R^3$	$V = 2\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$



3. Площа великого круга кулі (див. рисунок) дорівнює S . Визначте площу поверхні сфери, що обмежує цю кулю (ЗНО, 2018 р.).

А	Б	В	Г	Д
$4S$	S^2	$\frac{4S}{3}$	$2S$	$\frac{S}{4}$



4. Переріз кулі площиною має площу $81\pi \text{ см}^2$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 15 см. (ЗНО, 2013 р.).

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	9 см	12 см	15 см

5. Свинцеву кулю з радіусом 5 см переплавили в кульки однакового розміру, радіус кожної з яких — 1 см. Скільки таких кульок одержали? Втратами свинцю під час переплавлення знехтуйте. (ЗНО, 2009 р.).

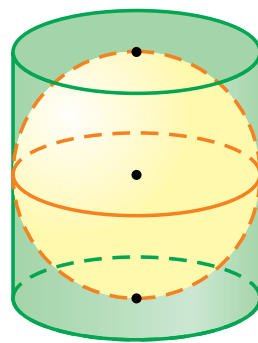
А	Б	В	Г	Д
125	50	25	10	5

6. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює a см. (ЗНО, 2007 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{2}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{1}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{1}{6}\pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{1}{12}\pi a^3 \text{ см}^3$

7. Із дерев'яної циліндричної заготовки, осевим перерізом якої є квадрат, виточили більярдну кулю найбільшого об'єму (див. рисунок). Визначте відношення об'єму кулі до об'єму всієї заготовки. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
1 : π	2 : π	1 : 2	2 : 3	1 : 3

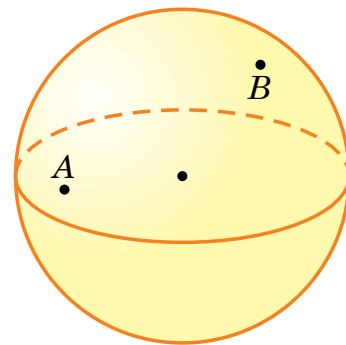


8. Точка A розташована всередині сфери з центром у точці O . Укажіть найменше можливе значення діаметра цієї сфери, якщо $OA = 6$.

А	Б	В	Г	Д
15	7	18	13	11

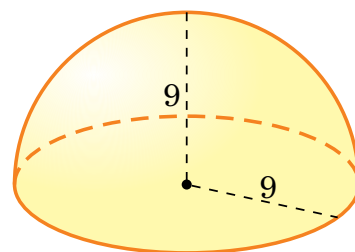
9. Точки A та B лежать на сфері, причому $AB = 10$ см (див. рисунок). Укажіть із-поміж наведених найменше можливе значення радіуса цієї сфери.

А	Б	В	Г	Д
4 см	3 см	6 см	11 см	8 см



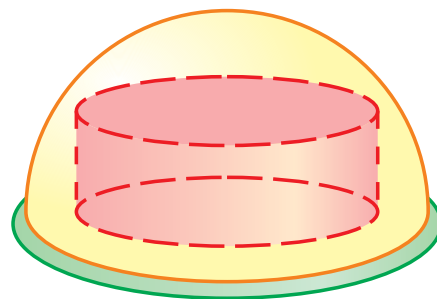
10. Обчисліть об'єм півкулі з радіусом 9 (див. рисунок). (НМТ, 2024 р.).

А	Б	В	Г	Д
486π	243π	324π	162π	972π



Рівень В

1. Для розігрівання в мікрохвильовій печі рідких страв використовують посудину у формі циліндра, радіус основи якого дорівнює 9 см. Посудина ставиться на горизонтальний диск у формі круга і накривається кришкою, що має форму півсфери (див. рисунок). Радіус півсфери дорівнює 12 см і є меншим за радіус круга. Укажіть найбільше з наведених значень, якому може дорівнювати висота посудини, якщо посудина не торкається кришки. (ЗНО, 2013 р.).



А	Б	В	Г	Д
3 см	5 см	6 см	7 см	8 см

2. Із дерев'яного циліндра, висота якого дорівнює діаметру основи і дорівнює 10 см виточили найбільшу кулю. Знайдіть відношення об'єму циліндра до об'єму кулі.
3. Металева куля з радіусом $R = \sqrt[3]{16}$ переплавлена на конус, висота якого 8. Знайдіть відношення площі бічної поверхні конуса до площі його основи.
4. Діаметр кулі дорівнює 6 см і є віссю циліндра, вписаного в цю кулю. Радіус основи циліндра дорівнює $\sqrt{5}$ см. Знайдіть відношення об'єму кулі до об'єму циліндра. Відповідь запишіть десятковим дробом.
5. Кулю перетнули площиною на відстані 12 см від її центра. Площа утвореного перерізу дорівнює 25π см². Знайдіть довжину радіуса кулі (у см). (ЗНО, 2009 р.).
6. У циліндр вписано кулю. Знайдіть об'єм кулі, якщо об'єм циліндра дорівнює 60 см³.
7. У порожню циліндричну посудину з діаметром основи 24 см налили воду. У воду повністю занурили кулю. Знайдіть радіус кулі (у см), якщо відомо, що вода в посудині піднялась на 6,75 см і не вилася. (ЗНО, 2009 р.).
8. У правильну чотирикутну піраміду вписано сферу, площа поверхні якої дорівнює 36 π см². Бічна грань піраміди нахилена до площини її основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм піраміди (у см³).
9. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із кутом 15°. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює 6 см. Обчисліть об'єм піраміди (у см³). (ЗНО, 2011 р.).
10. Навколо правильної трикутної призми описано сферу з радіусом 6 см. Радіус сфери, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут 30°. Визначте об'єм призми (у см³). (ЗНО, 2013 р.).

Рівень С

1. Задано сферу з площею поверхні 64 π см² і правильну трикутну призму. Радіус кола, вписаного в основу призми, дорівнює радіусу сфери, а висота призми дорівнює стороні її основи. Визначте об'єм (у см³) призми.
2. Задано сферу з площею поверхні 432 π см² і правильну трикутну піраміду. Радіус кола, описаного навколо основи піраміди, дорівнює радіусу сфери, а висота піраміди — діаметру сфери. Визначте об'єм (у см³) піраміди. (НМТ, 2025 р.).

3. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 6, 8 і 10. Висота призми дорівнює 24. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо призми.
4. Сторона основи і висота правильної чотирикутної піраміди дорівнюють по 4. Знайдіть площу поверхні кулі, описаної навколо піраміди.
5. У пряму чотирикутну призму, основою якої є ромб з діагоналями 3 і 4, вписано кулю. Визначте об'єм кулі.
6. Висота конуса дорівнює 8 см, а його твірна — 10 см. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в конус.
7. Ребро правильного тетраедра дорівнює $3\sqrt{6}$. Знайдіть площу поверхні кулі, яка дотикається до бічних граней тетраедра, якщо центр цієї кулі лежить на основі тетраедра.
8. Відношення об'єму зрізаного конуса до об'єму вписаної в нього кулі дорівнює m . Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини основи.
9. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо правильної зрізаної шестикутної піраміди, в якій сторони основ дорівнюють 3 см і 4 см, а висота дорівнює 7 см.
10. Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду завдовжки 12 см. Знайдіть об'єм кулі, якщо площі даних перерізів дорівнюють 64π см² і 100π см².

Рефлексія

1. Я умію розв'язувати задачі на знаходження площі поверхні сфери.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я розумію, як розв'язувати задачі на знаходження об'єму кулі.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
3. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач ЗНО/НМТ.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----







