

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 10. Урок–практикум. Куля та сфера. Задачі на обчислення площі поверхні сфери та об'єму кулі

План уроку

1. Задачі на обчислення площі поверхні сфери.
2. Задачі на обчислення об'єму кулі.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє комплексні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1-1];

пропонує ідеї щодо способу розв'язання комплексних проблемних ситуацій, зокрема пов'язаних із питаннями екологічної безпеки та сталого розвитку суспільства [12 МАО 2.2.1-1];

визначає компоненти математичної моделі комплексної проблемної ситуації, взаємозв'язки між ними [12 МАО 2.3.1-1];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі та шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1];

висловлюється математично грамотно, змістовно, точно, лаконічно, структурує власне мовлення [12 МАО 4.3.2-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності — на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Для домашньої роботи запропонуйте розв'язати 8–10 задач із тренувальних завдань, які не були розв'язані на уроці.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи можна, знаючи об'єм кулі, обчислити площу її поверхні?
- 2) Які геометричні фігури ви зможете отримати при перетині кулі площиною?
- 3) Як зміниться об'єм кулі, якщо її діаметр зменшити на 10%?
- 4) Де у мистецтві використовують форму кулі чи форму сфери? Чому, на вашу думку, така форма є привабливою?
- 5) Чому мильні бульбашки завжди прагнуть набути сферичної форми?

II. Повторення (Усно) (5 хв)

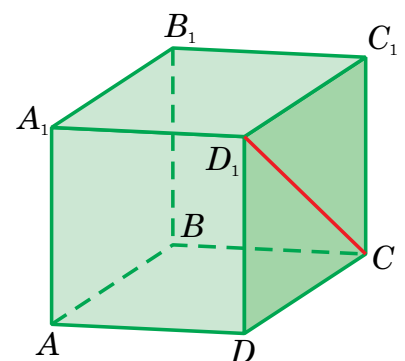
1. Катет прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а косинус прилеглого до нього кута дорівнює 0,3. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

Відповідь. 50 см.

2. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть пряму, яка перпендикулярна до прямої CD_1 .

- 1) CD ; 2) AD ;
- 3) AC ; 4) DD_1 .

Відповідь. 2).

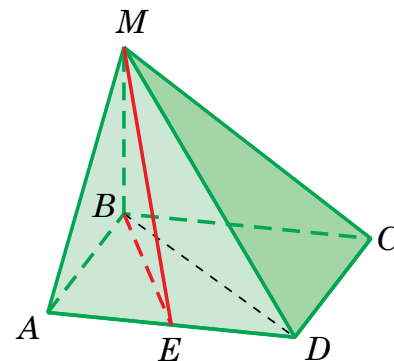


3. Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 8 см.

Відповідь. 16 см^2 .

4. Основою піраміди $MABCD$, зображеної на рисунку, є прямокутник, бічне ребро MB перпендикулярне до площини основи піраміди, точка E — середина ребра AD . Укажіть лінійний кут двогранного кута з ребром AD .

Відповідь. $\angle MAB$.



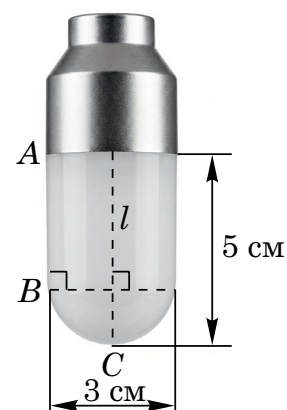
5. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є ромб зі стороною 6 см, а висота призми дорівнює 12 см.

Відповідь. 288 см^2 .

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На рисунку зображено осьовий переріз світлодіодної лампи. Активна поверхня цієї лампи, через яку відбувається випромінювання світла, є тілом обертання, утвореним обертанням відрізка AB та чверті кола BC навколо осі l . Використовуючи зазначені на рисунку дані, обчисліть площу активної поверхні світлодіодної лампи. Виберіть відповідь, найближчу до точної. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
39 см^2	42 см^2	45 см^2	48 см^2	51 см^2



III. Задачі на обчислення площі поверхні сфери

Площа сфери з радіусом R обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi R^2.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Визначте площу сфери, діаметр якої дорівнює 12 см. (ЗНО, 2010, 2015 рр.).

А	Б	В	Г	Д
$36\pi \text{ см}^2$	$72\pi \text{ см}^2$	$144\pi \text{ см}^2$	$288\pi \text{ см}^2$	$576\pi \text{ см}^2$

Розв'язання. Оскільки радіус сфери дорівнює 6 см, а площа сфери $S = 4\pi R^2$, то $S = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi (\text{см}^2)$.

Відповідь. В.

7. Площина перетинає сферу. Довжина лінії перетину дорівнює 10π см, а діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину, утворює з площиною перетину кут 60° . Знайдіть площу поверхні сфери.

Розв'язання. Зобразимо на рисунку сферу з центром в точці O , радіус якої $R = OA$. Перерізом сфери і площини α є коло з центром O_1 і радіусом R_1 , де $R_1 = O_1A$, а діаметр AC (див. рисунок).

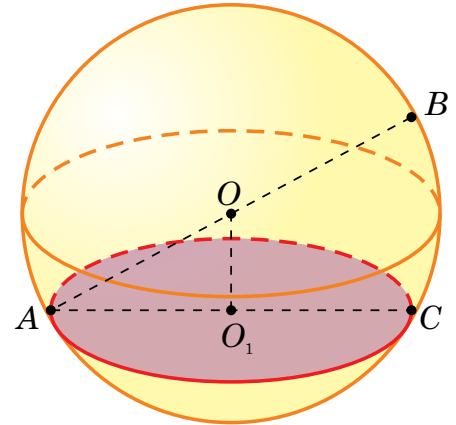
Довжина кола перетину $C = 2\pi R_1 = 10\pi$ см, звідки $R_1 = 5$ см, $AC = 10$ см.

Оскільки $OO_1 \perp AC$, то кут між діаметром сфери AB і площиною перетину є $\angle OAO_1 = 60^\circ$.

Розглянемо трикутник AOC . $AO = OC = R$ — радіуси сфери, тому трикутник AOC — рівносторонній, звідки $AC = OA = 10$ см.

Площа поверхні сфери $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi$ (см²).

Відповідь. 400π см².



8. Лінія перетину сфери та площини, розміщеної від центра сфери на відстані 8 см, має довжину 12π см. Знайдіть площу поверхні сфери.

Розв'язання. Зобразимо на рисунку сферу з центром в точці O , радіус якої $R = OA$. Перерізом сфери і площини α є коло з центром O_1 і радіусом R_1 , де $R_1 = O_1A$.

Довжина кола перетину $C = 2\pi R_1 = 12\pi$ см, звідки $R_1 = 6$ см.

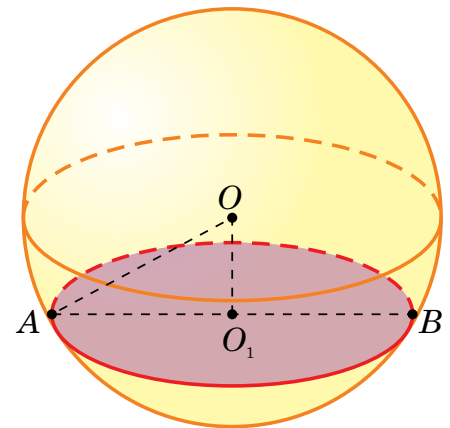
$OO_1 = 8$ см — за умовою.

З трикутника AOO_1 : $AO^2 = O_1A^2 + OO_1^2$.

$AO = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ (см).

Площа поверхні сфери $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi$ (см²).

Відповідь. 400π см².



9. Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної в конус, твірна якого дорівнює l і утворює з основою кут α .

Розв'язання. Центр вписаної кулі K — точка перетину висоти SO конуса і бісектриси AK кута SAO .

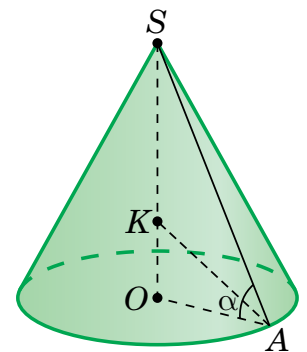
Із трикутника AKO маємо: $r = OK = OA \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Із трикутника SAO маємо: $OA = AS \cos \alpha = l \cos \alpha$.

Тоді $r = OA \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Отже, $S = 4\pi r^2 = 4\pi l^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $4\pi l^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.



IV. Задачі на обчислення об'єму кулі

Об'єм кулі з радіусом R обчислюється за формулою:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Ілюстративні приклади (7 хв)

- 10.** Об'єм кулі дорівнює 36π см³. Знайдіть її діаметр. (ЗНО, 2011 р.).

А	Б	В	Г	Д
3 см	24 см	6 см	18 см	12 см

Розв'язання. $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, $36\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$, $R^3 = 27$, $R = 3$ см.

Діаметр кулі дорівнює 6 см.

Відповідь. В.

- 11.** У склянку циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок. Визначте відношення об'єму води, яка залишилась у склянці, до об'єму води, яка вилилася зі склянки. (ЗНО, 2008 р.).

Розв'язання. Нехай R — радіус кулі.

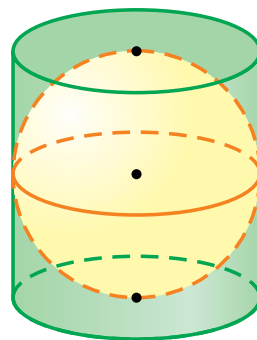
Висота циліндра дорівнює діаметру кулі, тобто $2R$. Радіус основи циліндра дорівнює радіусу кулі R .

Об'єм кулі $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Об'єм циліндра $V_2 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$.

Знайдемо відношення $\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{2\pi R^3 - \frac{4}{3} \pi R^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.



- 12.** Об'єми двох куль відносяться, як 27 : 125. Як відносяться площі їхніх поверхонь?

Розв'язання. Нехай R_1 і R_2 — радіуси двох куль. Відношення об'ємів двох куль дорівнює відношенню кубів радіусів, а відношення площ поверхонь двох куль дорівнює відношенню квадратів радіусів.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}; \frac{3^3}{5^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3; \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{5}; \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

Відповідь. 9 : 25.

- 13.** Усередині кулі проведені дві паралельні площини з одного боку від її центра на відстані 3 см одна від одної. Ці площини дають у перерізі два малих круги, радіуси яких 9 см і 12 см. Обчисліть об'єм кулі.

Розв'язання. Нехай R — радіус даної кулі, O_1 і O_2 — центри кругів, що утворюються при перетині даних паралельних площин з кулею (див. рисунок).

Нехай $OO_2 = x$.

Виразимо квадрати радіуса кулі з трикутників AO_1O і DO_2O і прирівняємо їх:

$$12^2 + x^2 = 9^2 + (3 + x)^2,$$

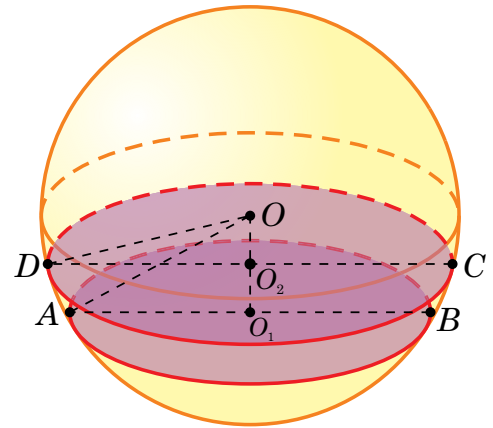
$$144 + x^2 = 81 + 9 + 6x + x^2, 6x = 54, x = 9.$$

Знайдемо радіус кулі:

$$R = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = 15.$$

$$\text{Об'єм кулі } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 4500\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. $4500\pi \text{ см}^3$.



V. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На рисунку зображено осьовий переріз світлодіодної лампи. Активна поверхня цієї лампи, через яку відбувається випромінювання світла, є тілом обертання, утвореним обертанням відрізка AB та чверті кола BC навколо осі l . Використовуючи зазначені на рисунку дані, обчисліть площу активної поверхні світлодіодної лампи. Виберіть відповідь, найближчу до точної. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
39 см ²	42 см ²	45 см ²	48 см ²	51 см ²

Розв'язання. Знайдемо площу півсфери з радіусом 1,5 см:

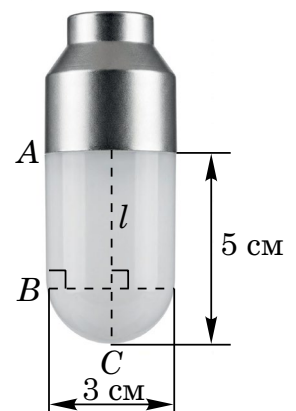
$$S_1 = 2\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}\pi = 4,5\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Знайдемо площу бічної поверхні циліндра з радіусом основи 1,5 см і висотою 3,5 см.
 $S_6 = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 3,5 = 10,5\pi \text{ (см}^2\text{)}.$

Площа активної поверхні лампи $S_A = S_1 + S_6 = 4,5\pi + 10,5\pi = 15\pi \text{ (см}^2\text{)},$ що приблизно становить $15 \cdot 3,14 = 47,1 \text{ см}^2.$

Відповідь, яка найближча до точної: $48 \text{ см}^2.$

Відповідь. Г.



VI. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С (10–15 хв)

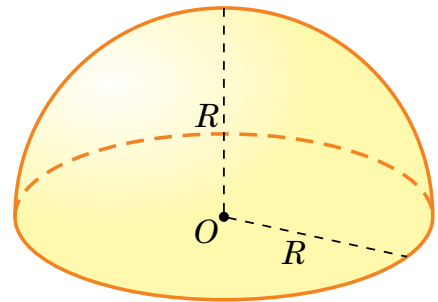
Рівень А

1. Укажіть формулу для визначення радіуса R сфери, площа поверхні якої дорівнює S . (ЗНО, 2020 р.).

А	Б	В	Г	Д
$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$	$R = \sqrt{\frac{4\pi}{S}}$	$R = \sqrt{4\pi S}$	$R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$	$R = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$

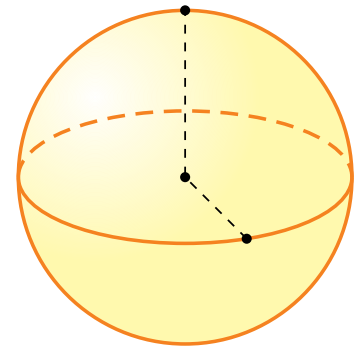
2. Укажіть формулу для обчислення об'єму V півкулі з радіусом R (див. рисунок). (ЗНО, 2018 р.).

А	Б	В	Г	Д
$V = 4\pi R^2$	$V = \frac{2}{3}\pi R^3$	$V = \pi R^3$	$V = 2\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$



3. Площа великого круга кулі (див. рисунок) дорівнює S . Визначте площу поверхні сфери, що обмежує цю кулю (ЗНО, 2018 р.).

А	Б	В	Г	Д
$4S$	S^2	$\frac{4S}{3}$	$2S$	$\frac{S}{4}$



4. Переріз кулі площиною має площу $81\pi \text{ см}^2$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 15 см . (ЗНО, 2013 р.).

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	9 см	12 см	15 см

5. Свинцеву кулю з радіусом 5 см переплавили в кульки однакового розміру, радіус кожної з яких — 1 см . Скільки таких кульок одержали? Втратами свинцю під час переплавлення знехтуйте. (ЗНО, 2009 р.).

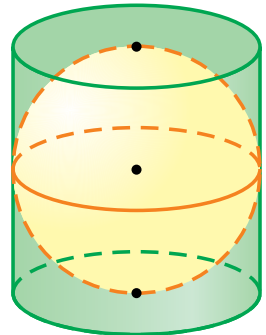
А	Б	В	Г	Д
125	50	25	10	5

6. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює a см. (ЗНО, 2007 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{2}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{1}{3}\pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{1}{6}\pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{1}{12}\pi a^3 \text{ см}^3$

7. Із дерев'яної циліндричної заготовки, осьовим перерізом якої є квадрат, виточили більярдну кулю найбільшого об'єму (див. рисунок). Визначте відношення об'єму кулі до об'єму всієї заготовки. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
$1 : \pi$	$2 : \pi$	$1 : 2$	$2 : 3$	$1 : 3$

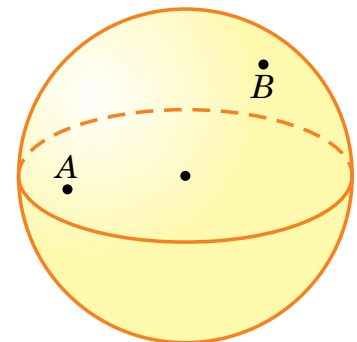


8. Точка A розташована всередині сфери з центром у точці O . Укажіть найменше можливе значення діаметра цієї сфери, якщо $OA = 6$.

А	Б	В	Г	Д
15	7	18	13	11

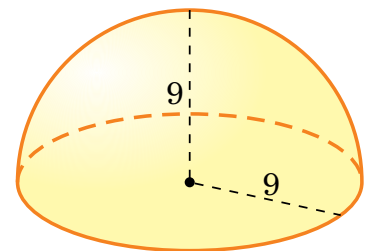
9. Точки A та B лежать на сфері, причому $AB = 10$ см (див. рисунок). Укажіть із-поміж наведених найменше можливе значення радіуса цієї сфери.

А	Б	В	Г	Д
4 см	3 см	6 см	11 см	8 см



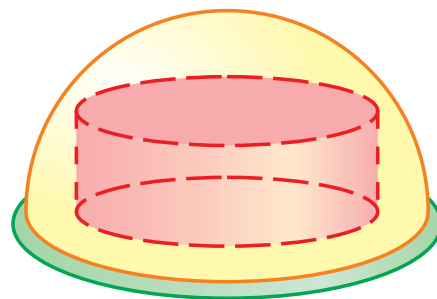
10. Обчисліть об'єм півкулі з радіусом 9 (див. рисунок). (НМТ, 2024 р.).

А	Б	В	Г	Д
486π	243π	324π	162π	972π



Рівень В

1. Для розігрівання в мікрохвильовій печі рідких страв використовують посудину у формі циліндра, радіус основи якого дорівнює 9 см. Посудина ставиться на горизонтальний диск у формі круга і накривається кришкою, що має форму півсфери (див. рисунок). Радіус півсфери дорівнює 12 см і є меншим за радіус круга. Укажіть найбільше з наведених значень, якому може дорівнювати висота посудини, якщо посудина не торкається кришки. (ЗНО, 2013 р.).



А	Б	В	Г	Д
3 см	5 см	6 см	7 см	8 см

2. Із дерев'яного циліндра, висота якого дорівнює діаметру основи і дорівнює 10 см виточили найбільшу кулю. Знайдіть відношення об'єму циліндра до об'єму кулі.
3. Металева куля з радіусом $R = \sqrt[3]{16}$ переплавлена на конус, висота якого 8. Знайдіть відношення площі бічної поверхні конуса до площі його основи.
4. Діаметр кулі дорівнює 6 см і є віссю циліндра, вписаного в цю кулю. Радіус основи циліндра дорівнює $\sqrt{5}$ см. Знайдіть відношення об'єму кулі до об'єму циліндра. Відповідь запишіть десятковим дробом.
5. Кулю перетнули площиною на відстані 12 см від її центра. Площа утвореного перерізу дорівнює 25π см². Знайдіть довжину радіуса кулі (у см). (ЗНО, 2009 р.).
6. У циліндр вписано кулю. Знайдіть об'єм кулі, якщо об'єм циліндра дорівнює 60 см³.
7. У порожню циліндричну посудину з діаметром основи 24 см налили воду. У воду повністю занурили кулю. Знайдіть радіус кулі (у см), якщо відомо, що вода в посудині піднялась на 6,75 см і не вилася. (ЗНО, 2009 р.).
8. У правильну чотирикутну піраміду вписано сферу, площа поверхні якої дорівнює 36π см². Бічна грань піраміди нахилена до площини її основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм піраміди (у см³).
9. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із кутом 15°. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює 6 см. Обчисліть об'єм піраміди (у см³). (ЗНО, 2011 р.).
10. Навколо правильної трикутної призми описано сферу з радіусом 6 см. Радіус сфери, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут 30°. Визначте об'єм призми (у см³). (ЗНО, 2013 р.).

Рівень С

1. Задано сферу з площею поверхні 64π см² і правильну трикутну призму. Радіус кола, вписаного в основу призми, дорівнює радіусу сфери, а висота призми дорівнює стороні її основи. Визначте об'єм (у см³) призми.
2. Задано сферу з площею поверхні 432π см² і правильну трикутну піраміду. Радіус кола, описаного навколо основи піраміди, дорівнює радіусу сфери, а висота піраміди — діаметру сфери. Визначте об'єм (у см³) піраміди. (НМТ, 2025 р.).

3. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 6, 8 і 10. Висота призми дорівнює 24. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо призми.
4. Сторона основи і висота правильної чотирикутної піраміди дорівнюють по 4. Знайдіть площу поверхні кулі, описаної навколо піраміди.
5. У пряму чотирикутну призму, основою якої є ромб з діагоналями 3 і 4, вписано кулю. Визначте об'єм кулі.
6. Висота конуса дорівнює 8 см, а його твірна — 10 см. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в конус.
7. Ребро правильного тетраедра дорівнює $3\sqrt{6}$. Знайдіть площу поверхні кулі, яка дотикається до бічних граней тетраедра, якщо центр цієї кулі лежить на основі тетраедра.
8. Відношення об'єму зрізаного конуса до об'єму вписаної в нього кулі дорівнює m . Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини основи.
9. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо правильної зрізаної шестикутної піраміди, в якій сторони основ дорівнюють 3 см і 4 см, а висота дорівнює 7 см.
10. Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду завдовжки 12 см. Знайдіть об'єм кулі, якщо площі даних перерізів дорівнюють 64π см² і 100π см².

VII. Рефлексія (1 хв)

1. Я умію розв'язувати задачі на знаходження площі поверхні сфери.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я розумію, як розв'язувати задачі на знаходження об'єму кулі.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
3. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач ЗНО/НМТ.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----