

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 2. Призма. Об'єм призми

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

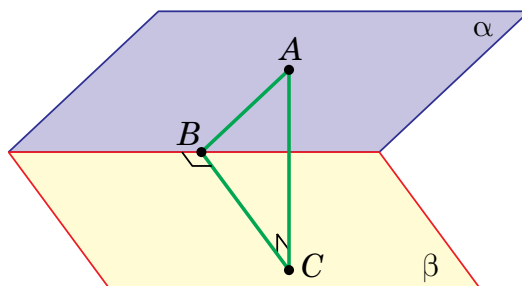
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите формулу об'єму призми;
- 2) навчитеся знаходити об'єми прямих і похилих призм;
- 3) повторите формули для знаходження об'ємів паралелепіпеда та куба;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування задач для підготовки до ЗНО/НМТ.

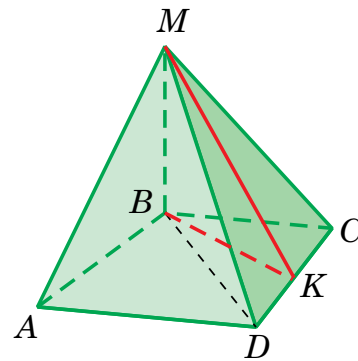
II. Повторення (Усно) (5 хв)

1. Точка A лежить в одній із граней двогранного кута, зображеного на рисунку. З точки A опущено перпендикуляр AB на ребро двогранного кута і перпендикуляр AC на іншу грань кута, $AB = 14$ см, $AC = 7$ см. Знайдіть величину двогранного кута.

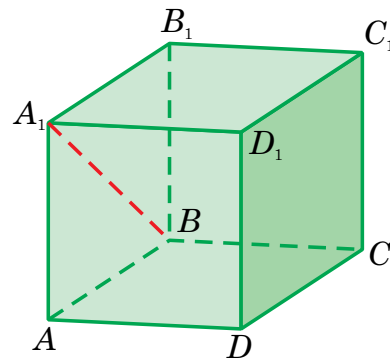


2. Діагональ квадрата дорівнює 10 см. Знайдіть периметр цього квадрата.

3. Основою піраміди $MABCD$, зображеної на рисунку, є квадрат, бічне ребро MB перпендикулярне до площини основи піраміди, точка K — середина ребра CD . Укажіть, який з кутів є лінійним кутом двогранного кута з ребром CD .



4. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдіть кут між прямими $A_1 B$ і DD_1 .



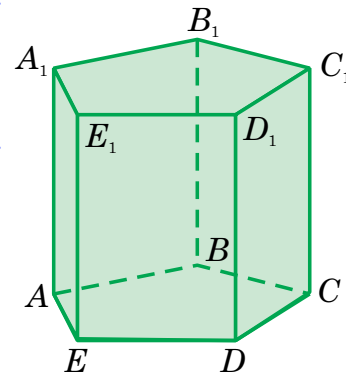
5. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 8 см і 22 см, а висота призми дорівнює 15 см.

III. Об'єм призми

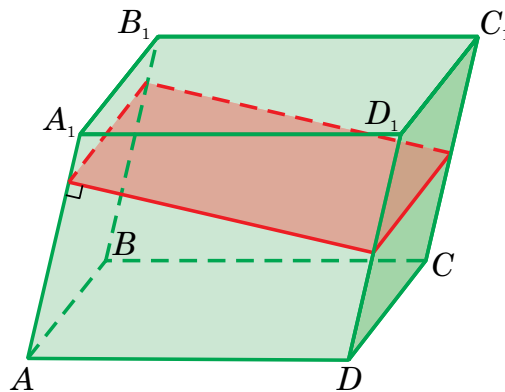
Теорема. Об'єм призми дорівнює добутку площі основи призми та висоти призми:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі основи та довжини бічного ребра.



Якщо у похилій призмі побудувати переріз, перпендикулярний до бічних ребер призми, то об'єм такої призми дорівнює добутку площі перерізу та бічного ребра.



Об'єм прямокутного паралелепіпеда

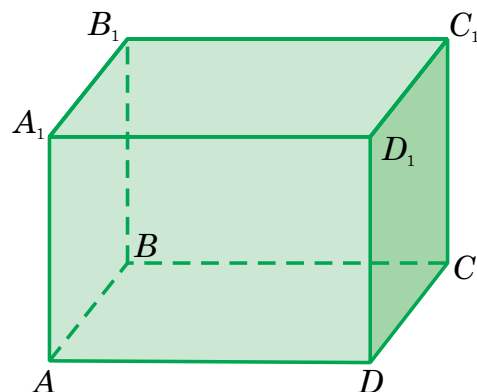
$$V = abc,$$

де a, b, c — виміри цього паралелепіпеда.

Об'єм куба

$$V = a^3,$$

де a — сторона куба.



IV. Розв'язування тестових завдань ЗНО/НМТ з теми «Призма» (10 хв)

Приклад 1. Обчисліть об'єм правильної трикутної призми, бічні грані якої є квадратами, а площа основи дорівнює $9\sqrt{3}$ см². (ЗНО, 2018 р.).

А	Б	В	Г	Д
$54\sqrt{3}$ см ³	$27\sqrt{3}$ см ³	27 см ³	$\frac{27}{2}\sqrt{3}$ см ³	$162\sqrt{3}$ см ³

Розв'язання. Площу рівностороннього трикутника можна обчислювати за формулою $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, тому $9\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, звідки сторона основи $a = 6$ см.

Оскільки бічні грані даної призми є квадратами, то висота цієї призми також дорівнює 6 см.

Об'єм даної призми дорівнює $9\sqrt{3} \cdot 6 = 54\sqrt{3}$ (см³)

Відповідь. А.

Приклад 2. Площа поверхні куба 96 м². Знайдіть об'єм куба. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
64 см ³	48 см ³	36 см ³	24 см ³	Інша відповідь

Розв'язання. Якщо сторона куба дорівнює a , то площа поверхні дорівнює $6a^2$.

$$6a^2 = 96, a^2 = 16, a = 4.$$

Об'єм куба дорівнює a^3 , тобто 64 см³.

Відповідь. А.

Приклад 3. Основою прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є ромб $ABCD$, у якому більша діагональ $AC = 17$ см. Об'єм призми дорівнює 1020 см³. Через діагональ AC та вершину B_1 тупого кута верхньої основи призми проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут α . Знайдіть площу утвореного перерізу призми (у см²), якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$. (ЗНО, 2013 р.).

Розв'язання. Оскільки $BO \perp AC$, то, за теоремою про три перпендикуляри, $B_1O \perp AC$, тому $\angle B_1OB = \alpha$.

$$\text{Нехай } BO = x, \text{ тоді } BD = 2x, S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 17 = 17x.$$

З прямокутного трикутника B_1BO :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BB_1}{BO}, \quad 2,4 = \frac{BB_1}{x}, \quad BB_1 = 2,4x.$$

$$\text{Об'єм призми: } V = 17x \cdot 2,4x = 40,8x^2$$

$$40,8x^2 = 1020, \quad x^2 = 25, \quad x = 5.$$

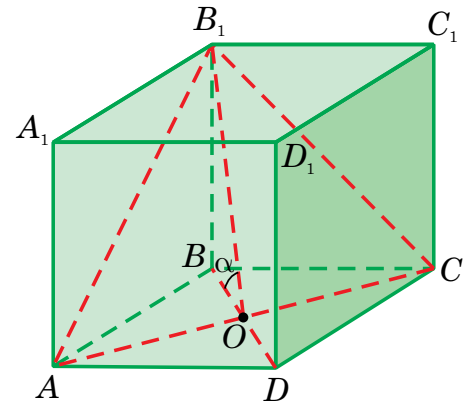
$$\text{Отже, } BO = 5 \text{ см, } BB_1 = 2,4 \cdot 5 = 12 \text{ (см).}$$

За теоремою Піфагора, з трикутника B_1BO :

$$B_1O = \sqrt{BB_1^2 + BO^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см).}$$

$$S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2} \cdot B_1O \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 17 = 110,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 110,5 см².



Приклад 4. Основою правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник ABC . Точка K — середина ребра BC . Площина, що проходить через точки A , K та B_1 утворює з площиною основи призми кут α . Визначте об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо відстань від вершини A до грані BB_1C_1C дорівнює d . (ЗНО, 2017 р.).

Розв'язання. $AK \perp BC$ — медіана рівностороннього трикутника є його висотою.

$CC_1 \perp AK$ — призма за умовою правильна, а отже, — пряма.

За ознакою перпендикулярності прямої і площини, $AK \perp (BCC_1)$, тому $AK = d$.

За теоремою про три перпендикуляри, $B_1K \perp AK$, тому $\angle B_1KB = \alpha$.

З прямокутного трикутника AKB :

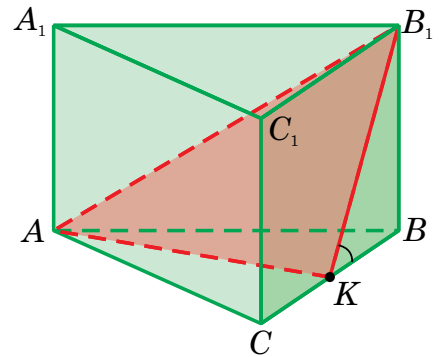
$$BK = AK \operatorname{ctg} 60^\circ, \quad BK = \frac{d\sqrt{3}}{3}, \quad BC = \frac{2d\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2d\sqrt{3}}{3} \cdot d = \frac{d^2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{З прямокутного трикутника } BB_1K: BB_1 = BK \operatorname{tg} \alpha, \quad BB_1 = \frac{d\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Об'єм даної призми: } V = \frac{d^2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{d\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha = \frac{d^3 \operatorname{tg} \alpha}{3}.$$

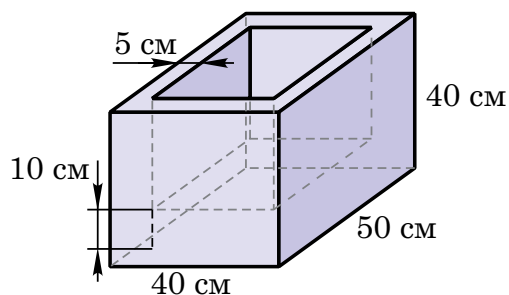
$$\text{Відповідь. } \frac{d^3 \operatorname{tg} \alpha}{3}.$$



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

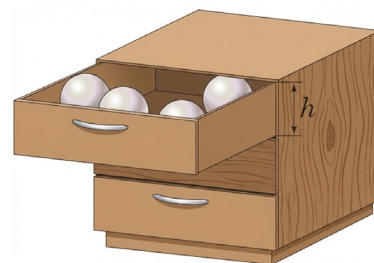
Задача. На площі міста встановили однакові бетонні ємності для квітів, виготовлені у формі прямокутних паралелепіпедів, виміри яких дорівнюють 40 см, 40 см і 50 см (див. рисунок). Товщина кожної з чотирьох бічних стінок становить 5 см, а товщина днища — 10 см. Який об'єм бетону (у м^3) було використано для виготовлення 10 таких ємностей? Утратою бетону під час виготовлення знехтуйте. (ЗНО, 2014 р.).



VI. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Пластикові кульки радіуса 6 см зберігають у висувній шухлядці, що має форму прямокутного паралелепіпеда (див. рисунок). Якою з наведених може бути висота h цієї шухлядки? (ЗНО, 2021 р.).



А	Б	В	Г
3 см	6 см	10 см	13 см

2. Визначте об'єм правильної трикутної призми, бічні грані якої є квадратами, а периметр основи дорівнює 12. (ЗНО, 2016 р.).

А	Б	В	Г	Д
$16\sqrt{3}$	64	48	$64\sqrt{3}$	576

3. Площа поверхні куба 150 м^2 . Знайдіть його об'єм. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
25 см^3	50 см^3	100 см^3	125 см^3	інша відповідь

4. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 4 см. Діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 30° . Обчисліть об'єм паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
$12\sqrt{3} \text{ см}^3$	$24\sqrt{3} \text{ см}^3$	$3\sqrt{6} \text{ см}^3$	$6\sqrt{3} \text{ см}^3$	$20\sqrt{3} \text{ см}^3$

5. Скільки ящиків, які мають форму прямокутного паралелепіпеда з розмірами $1,4 \text{ м} \times 1 \text{ м} \times 0,8 \text{ м}$, можна помістити в контейнер із такою самою формою, розміри якого становлять $2,4 \text{ м} \times 3 \text{ м} \times 4,2 \text{ м}$?

А	Б	В	Г	Д
6	9	12	27	81

6. В основі прямої призми лежить трапеція з основами 9 см і 15 см і висотою 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
500 см^3	600 см^3	300 см^3	400 см^3	інша відповідь

7. На скільки відсотків збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити на 50 %? (ЗНО, 2005 р.).

А	Б	В	Г	Д
на 50%	на 125 %	на 150%	на 237,5 %	на 337,5%

8. Основою похилої призми є паралелограм зі сторонами 6 см і 3 см і гострим кутом 45° . Бічне ребро призми дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайдіть об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$18\sqrt{6} \text{ см}^3$	$12\sqrt{6} \text{ см}^3$	$18\sqrt{2} \text{ см}^3$	$9\sqrt{2} \text{ см}^3$	$36\sqrt{2} \text{ см}^3$

9. Діагональним перерізом правильної чотирикутної призми є квадрат, площа якого дорівнює S . Знайдіть об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$S\sqrt{2S}$	$\frac{S\sqrt{S}}{\sqrt{2}}$	$2S\sqrt{S}$	$S\sqrt{S}$	$\frac{S\sqrt{S}}{2}$

10. Розгорткою бічної поверхні правильної чотирикутної призми є квадрат зі стороною 8 см. Знайдіть об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
16 см^3	24 см^3	32 см^3	48 см^3	64 см^3

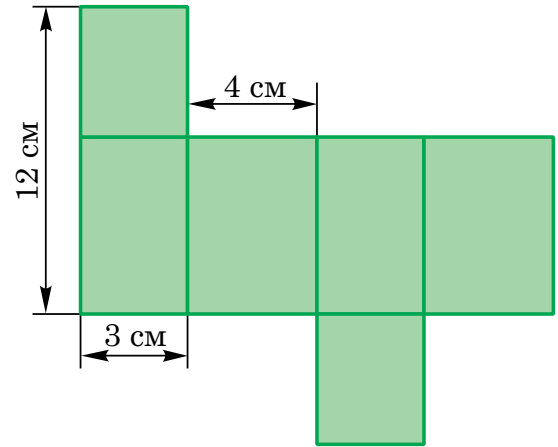
Рівень В

1. Цеглина має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 25 см, 12 см, 6,5 см. Знайдіть масу m цеглини. (Для знаходження маси цеглини скористайтесь формулою $m = \rho V$, де V — об'єм, $\rho = 1,8 \text{ г/см}^3$ — густина цегли). (ЗНО, 2010 р.).

А	Б	В	Г	Д
5,31 кг	3,51 кг	3,5 кг	3,41 кг	3 кг

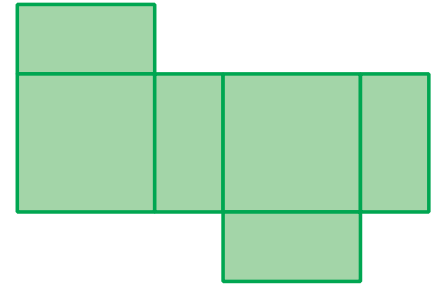
2. На рисунку зображено розгортку прямокутного паралелепіпеда. Використовуючи зазначені на рисунку розміри, обчисліть об'єм цього паралелепіпеда. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
96 см ³	108 см ³	128 см ³	136 см ³	144 см ³

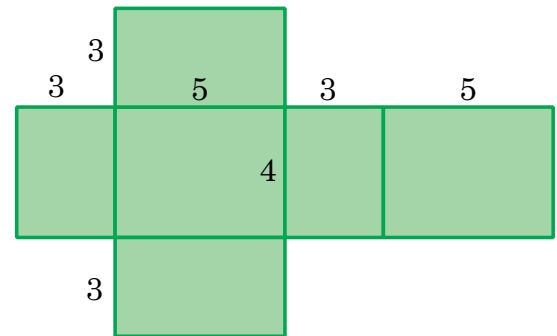


3. На рисунку зображено розгортку поверхні тіла, складеного з двох квадратів і чотирьох однакових прямокутників, довжина сторін яких — 3 см і 6 см. Визначте об'єм цього тіла. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
108 см ³	54 см ³	144 см ³	36 см ³	інша відповідь



4. Основою прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC , де $AB = BC = 25$ см, $AC = 30$ см. Через бічне ребро AA_1 призми проведено площину, перпендикулярну до ребра BC . Визначте об'єм призми (у см³), якщо площа утвореного перерізу дорівнює 72 см². (ЗНО, 2012 р.).
5. На рисунку зображено розгортку поверхні тіла, складену з шести попарно рівних прямокутників, розміри яких указано. Обчисліть об'єм цього тіла. (ЗНО, 2008 р.).



6. Площі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 20 см², 24 см² і 30 см². Знайдіть об'єм паралелепіпеда, (у см³). (ЗНО, 2007 р.).
7. Для опалювальної системи будинку потрібні радіатори з розрахунку три штуки на 5 м³. Яку кількість радіаторів треба замовити, якщо новий будинок має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 15 м, 18 м і 25 м? (ЗНО, 2007 р.).
8. Основою прямої призми є прямокутна трапеція з тупим кутом 120° і меншою основою довжиною 4 см. Діагональ трапеції є бісектрисою її гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм призми.
9. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, якщо її діагональ утворює із площиною бічної грані кут 30°, а сторона основи дорівнює a .
10. Сторони основи похилого паралелепіпеда дорівнюють 6 см і 12 см і утворюють кут 60°. Бічне ребро призми дорівнює 14 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Рівень С

1. Основою прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу BC . Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину паралельно ребру AB . Знайдіть площу утвореного перерізу (у см^2), якщо об'єм призми дорівнює 672 см^3 , а її висота — 8 см . (ЗНО, 2012 р.).
2. Басейн має форму прямокутного паралелепіпеда, розміри дна якого $5 \text{ м} \times 20 \text{ м}$, а глибина — 3 м . Обчисліть час (у хв), за який басейн наповниться водою на висоту $2,8 \text{ м}$, якщо швидкість подачі води $7 \text{ м}^3/\text{хв}$. (ЗНО, 2007 р.).
3. Основою прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є прямокутник $ABCD$, у якому діагональ $AC = a$, $\angle BAC = \beta$. Площина, що проходить через вершину верхньої основи та діагональ нижньої основи призми, утворює з площиною основи гострий кут α . Визначте об'єм заданої призми. (ЗНО, 2017 р.).
4. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 3 см , висота — 8 см . Через сторону основи під кутом 45° до її площини проведено площину. Знайдіть:
а) площу утвореного перерізу;
б) відношення об'ємів частин, на які проведена площина ділить призму. (ЗНО, 2009 р.).
5. Правильна шестикутна призма, бічні ребра якої дорівнюють по 3 см , поділена діагональною площиною на дві рівні чотирикутні призми. Знайдіть об'єм шестикутної призми, якщо бічна поверхня чотирикутної призми дорівнює 30 см^2 .
6. Найбільша діагональ правильної шестикутної призми дорівнює d і утворює з бічним ребром призми кут 30° . Знайдіть об'єм призми.
7. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α , а з площиною бічної грані — кут β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
8. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 3 м і 4 м . Одна з діагоналей цього паралелепіпеда дорівнює 5 м , а інша — 7 м . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
9. В основі прямої призми лежить трикутник із кутами α і β . Діагональ бічної грані, що містить сторону, для якої дані кути є прилеглими, дорівнює d й утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм призми.
10. Основою похилого паралелепіпеда є ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 60° . Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 4 см й утворює з ребрами основи, які виходять з цієї ж вершини, кути 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда (у см^3).

Рефлексія

- | | | | |
|----|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю формулу об'єму призми. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я умію знаходити об'єм похилої призми. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я розумію, як знаходити об'єм паралелепіпеда. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |







