

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 3. Піраміда. Правильна піраміда. Площі бічної та повної поверхонь піраміди

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

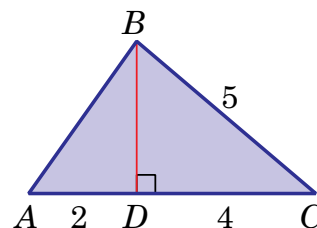
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

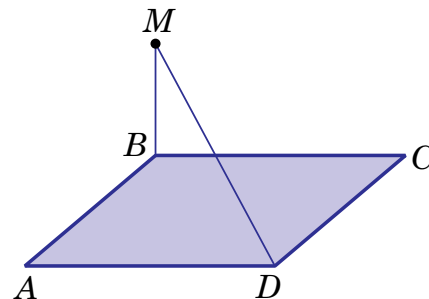
- 1) повторите означення піраміди і як визначати всі її елементи;
- 2) повторите означення правильної піраміди;
- 3) повторите, що таке бічна і повна поверхні піраміди;
- 4) пригадаєте формулу для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування задач для підготовки до ЗНО/НМТ.

II. Повторення (Усно) (5 хв)

1. Відрізок BD — висота трикутника ABC , зображеного на рисунку. Чому дорівнює площа трикутника ABC (довжини відрізків на рисунку наведено в сантиметрах)?



2. Пряма MB перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$, зображеного на рисунку. Укажіть кут між прямою MD і площиною квадрата.



3. Обчисліть периметр прямокутника, діагональ якого дорівнює 25 см, а одна із сторін — 7 см.
4. Яке з тверджень є правильним?
 А) Якщо пряма a не паралельна прямій b , яка лежить у площині α , то пряма a не може бути паралельна площині α ;
 Б) якщо пряма a , яка не лежить у площині α , паралельна прямій b цієї площини, то пряма a паралельна площині α ;
 В) якщо пряма a перетинає площину α , а пряма b належить площині α , то пряма a обов'язково перетинає пряму b ;
 Г) якщо дві прямі у просторі не мають спільних точок, то вони паралельні.
5. Обчисліть об'єм правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 20 см, а висота — 9 см.

III. Піраміда. Види пірамід. Елементи піраміди

$SA_1A_2\dots A_n$ — піраміда.

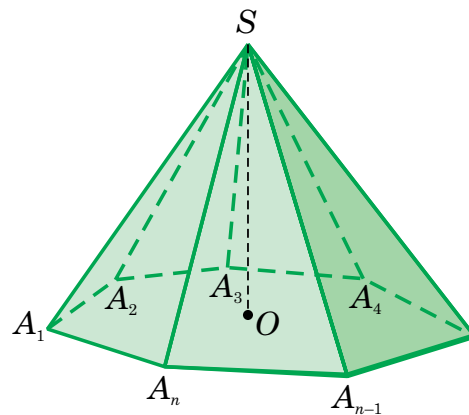
$A_1A_2\dots A_n$ — основа піраміди.

SO — висота піраміди (перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до площини основи).

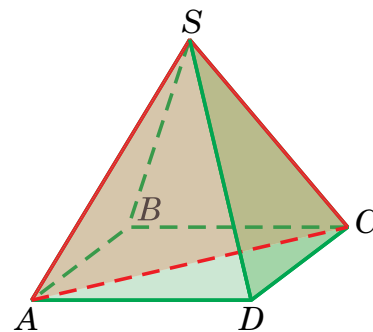
$\triangle A_1SA_2, \triangle A_2SA_3, \dots, \triangle A_nSA_1$ — бічні грані.

$SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ — бічні ребра.

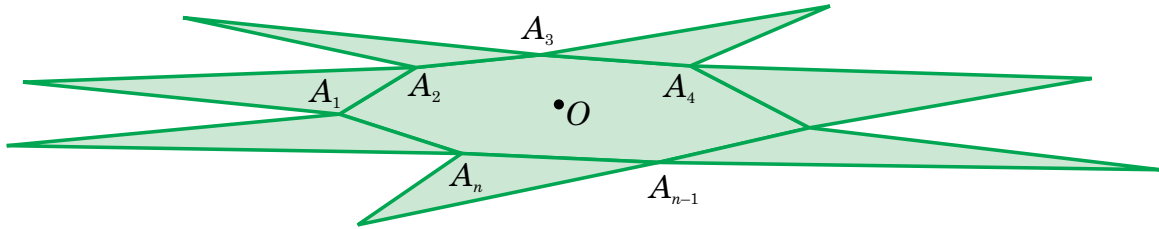
$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ — ребра основи.



Означення. Діагональним перерізом піраміди називається переріз піраміди площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не лежать в одній грані.



Розгортка піраміди



Розгортка піраміди — набір з'єднаних ребрами багатокутників у площині, які можна зігнути (уздовж ребер) та «склеїти» вздовж межі, перетворивши на грані піраміди.

Використовуючи розгортку багатогранника, легко виготовити просторову модель піраміди.

IV. Правильна піраміда

Означення. Піраміда називається **правильною**, якщо її основа є правильним n -кутником, а основа висоти цієї піраміди співпадає з центром n -кутника.

Приклад. $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда.

$ABCD$ — квадрат.

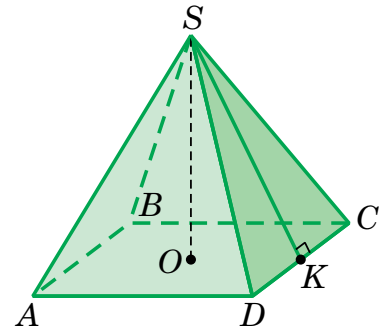
O — центр квадрата.

Відрізок SO — висота піраміди.

Пряма SO — вісь піраміди.

Означення. Висота бічної грані правильної піраміди називається **апофемою**.

SK — апофема правильної піраміди.



V. Площі бічної та повної поверхонь піраміди

Означення. **Площею бічної поверхні** піраміди називають суму площ усіх її бічних граней.

$$S_{\Pi} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн}},$$

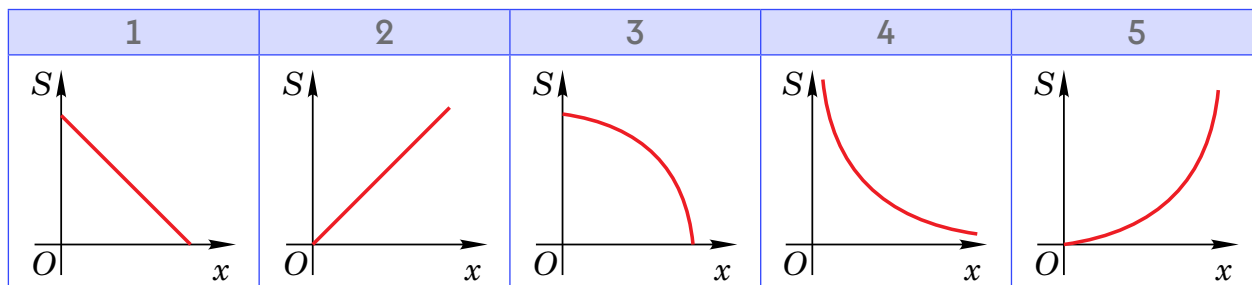
де S_{Π} — площа поверхні піраміди (ще говорять: площа повної поверхні піраміди), $S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні піраміди, $S_{\text{осн}}$ — площа основи піраміди.

Теорема. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофемі.

VI. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Нехай $S(x)$ — площа перерізу піраміди, проведеного паралельно основі на відстані x від неї. Який із наведених графіків може бути графіком функції $S(x)$? У відповіді вкажіть номер графіка. (ЗНО, 2005 р.)



VII. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- 1.** Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 24, апофема утворює з площиною основи піраміди кут 45° . Визначте довжину сторони основи цієї піраміди. (ЗНО, 2020 р.).

А	Б	В	Г	Д
24	$16\sqrt{3}$	$24\sqrt{2}$	48	$48\sqrt{2}$

- 2.** Периметр основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 72 см. Визначте довжину висоти піраміди, якщо її апофема дорівнює 15 см. (ЗНО, 2017 р.).

А	Б	В	Г	Д
6 см	9 см	10 см	12 см	14 см

- 3.** Визначте площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, довжина сторони основи якої дорівнює 10 см, а довжина бічного ребра — 13 см. (ЗНО, 2017 р.).

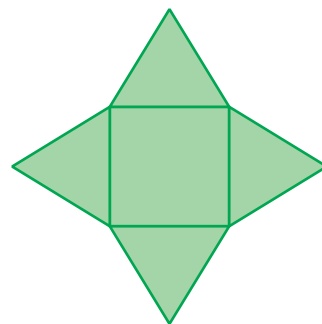
А	Б	В	Г	Д
180 см^2	$15\sqrt{69} \text{ см}^2$	$30\sqrt{69} \text{ см}^2$	360 см^2	390 см^2

- 4.** Визначте кількість граней восьмикутної піраміди. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
7	8	9	16	17

5. На рисунку зображено розгортку піраміди, що складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, і чотирьох правильних трикутників. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди (у см^2).

А	Б	В	Г	Д
$100\sqrt{3} \text{ см}^2$	100 см^2	$400\sqrt{3} \text{ см}^2$	$100(1 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$	200 см^2



6. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, її висота — 8 см. Знайдіть довжину сторони основи піраміди. (ЗНО, 2013 р.).

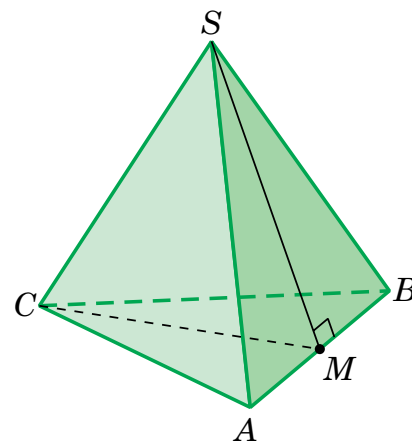
А	Б	В	Г	Д
12 см	$6\sqrt{3} \text{ см}$	4 см	6 см	$6\sqrt{2} \text{ см}$

7. Скільки всього граней у піраміди, яка має 12 ребер? (ЗНО, 2010 р.).

А	Б	В	Г	Д
4	6	7	12	13

8. На рисунку зображено трикутну піраміду $SABC$ з основою ABC . SM — апофема піраміди. Бічною гранню цієї піраміди є ...

А	Б	В	Г	Д
SA	SCM	ABC	ABS	SB



9. Укажіть формулу для обчислення площі S бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, сторона основи й апофема якої дорівнюють a .

А	Б	В	Г	Д
$S = a^4$	$S = 2a^2$	$S = 4a^2$	$S = \frac{a^2}{2}$	$S = 6a^2$

10. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, в якій плоский кут при вершині дорівнює 30° , а бічне ребро — 10 см.

А	Б	В	Г	Д
75 см^2	85 см^2	70 см^2	100 см^2	50 см^2

Рівень В

1. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема — 5 см. Визначте косинус кута між площиною бічної грані піраміди і площиною основи. (ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$

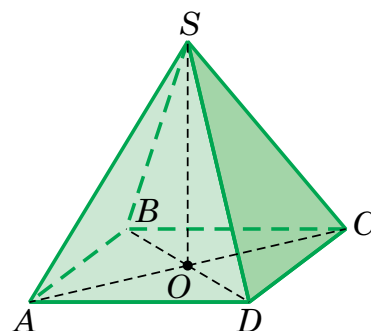
2. Обчисліть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 см, а апофема на 2 см більша за сторону основи піраміди.

А	Б	В	Г	Д
120 см ²	240 см ²	192 см ²	72 см ²	384 см ²

3. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ (див. рисунок) SO — висота, $\angle SCO = 30^\circ$, $AO = \sqrt{6}$. У відповідності початок речення (1–3) та його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (НМТ, 2023 р. (дем.)).

- 1 Довжина діагоналі AC дорівнює
- 2 Довжина висоти SO дорівнює
- 3 Довжина ребра AS дорівнює

- А $\sqrt{2}$.
- Б $2\sqrt{2}$.
- В $2\sqrt{3}$.
- Г $2\sqrt{6}$.
- Д $4\sqrt{2}$.



	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

4. Бічна грань правильної трикутної піраміди є прямокутним трикутником з гіпотенузою 6 см. Визначте площу (у см²) бічної поверхні цієї піраміди.
5. Діагональним перерізом правильної чотирикутної піраміди є рівносторонній трикутник, висота піраміди дорівнює $4\sqrt{6}$ см. Визначте площу S (у см²) бічної поверхні цієї піраміди. У відповідь запишіть значення $\frac{S}{\sqrt{7}}$.
6. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{6}$, а діагональний переріз є рівностороннім трикутником. Визначте площу S бічної поверхні цієї піраміди. У відповідь запишіть значення $\frac{S}{\sqrt{7}}$.
7. Бічна грань правильної трикутної піраміди є рівностороннім трикутником зі стороною $4\sqrt{6}$ см. Визначте висоту (у см) цієї піраміди.
8. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см. Обчисліть площу повної поверхні цієї піраміди (у см²), якщо кут між апофемою та висотою піраміди дорівнює 30° . (ЗНО, 2015 р.).
9. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди (у см²).

10. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см. Апофема утворює з площиною основи кут 60° . Обчисліть площу бічної поверхні піраміди (у см^2). (ЗНО, 2006 р.).

Рівень С

1. Основою піраміди $ABCD$ є правильний трикутник ABC . Грань ABD перпендикулярна до площині основи. Відомо, що $AD = BD = 7$, $AB = 8$. Знайдіть довжину ребра CD . (ЗНО, 2005 р.).
2. Основою піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$, більша діагональ якого $AC = 30$. Грань SBC є рівнобедреним трикутником ($SB = SC$) і перпендикулярна до площини основи піраміди. Ребро SC нахилено до площини основи піраміди під кутом 30° . Визначте кут між площинами (SAD) і (ABC) , якщо висота піраміди дорівнює 5. (ЗНО, 2016 р.).
3. Знайдіть двогранний кут між бічними гранями правильної трикутної піраміди, якщо двогранний кут між бічною гранню і основою дорівнює φ . (ЗНО, 2008 р.).
4. Основою чотирикутної піраміди $PABCD$ є квадрат $ABCD$. Ребро BP перпендикулярне до площини основи піраміди. Точка K — середина ребра PC . Площина BKP утворює з площиною основи піраміди кут α . Знайдіть площу трикутника BKD , якщо довжина ребра BP дорівнює h . (ЗНО, 2005 р.).
5. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$ з гострим кутом A . Ребро SB перпендикулярне до прямих AB і BC . Проекцією ребра SD на площину основи піраміди є відрізок довжиною 10 см, який утворює зі стороною AD кут 30° . Визначте кут між площинами (SAD) і (ABC) , якщо $SD = 15$ см.
6. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ сторона основи $ABCD$ дорівнює c , а бічне ребро SA утворює з площиною основи кут α . Через основу висоти піраміди паралельно грані ASD проведено площину β .
 1. Побудуйте переріз піраміди $SABCD$ площиною β .
 2. Обґрунтуйте вид перерізу.
 3. Визначте периметр перерізу.
7. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ через діагональ BD основи перпендикулярно до бічного ребра SC проведено площину γ . Ця площина утворює з площиною основи піраміди кут α . Висота піраміди дорівнює H .
 1. Побудуйте переріз піраміди $SABC$ площиною γ .
 2. Обґрунтуйте вид перерізу.
 3. Визначте площу перерізу. (ЗНО, 2018 р.).
8. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із бічною стороною a і кутом при основі α . Усі бічні ребра піраміди утворюють із її висотою кути β . Знайдіть висоту піраміди.
9. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ (S — вершина) бічне ребро вдвічі більше за сторону основи. Знайдіть кут між медіаною трикутника SDC , проведеною з вершини D , та середньою лінією трикутника ASC , що паралельна основі піраміди. (ЗНО, 2007 р.).
10. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут β . Відрізок, що сполучає центр вписаного в бічну грань кола з вершиною основи цієї грані, дорівнює l . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Рефлексія

- 1.** Я знаю, що таке піраміда й умію визначати всі її елементи.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- 2.** Я знаю, що таке правильна піраміда.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- 3.** Я розумію, що таке бічна і повна поверхні піраміди.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- 4.** Я знаю формулу для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- 5.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----







