

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 4. Піраміда. Об'єм піраміди. Особливі випадки пірамід

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите формулу для обчислення об'єму піраміди;
- 2) пригадаєте, де буде основа висоти піраміди, усі бічні грані якої нахилені до основи під рівними кутами;
- 3) пригадаєте, де буде основа висоти піраміди, усі бічні ребра якої рівні або нахилені до основи під рівними кутами;
- 4) пригадаєте, де буде основа висоти піраміди, в якій дві бічні грані перпендикулярні до основи;
- 5) пригадаєте, де буде основа висоти піраміди, в якій одна бічна грань перпендикулярна до основи;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування задач для підготовки до ЗНО/НМТ.

II. Повторення (Усно)

1. Чому дорівнює відношення бічних сторін трапеції, вписаної в коло?
2. Дано трикутник ABC . Площина, паралельна прямій AB , перетинає сторону AC у точці M , а сторону BC — у точці K . Яка довжина відрізка MK , якщо точка M — середина сторони AC , точка K — середина сторони BC і $AB = 16$ см?
3. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основа якої — трикутник зі сторонами 10 см, 12 см і 13 см, а бічне ребро дорівнює 8 см.

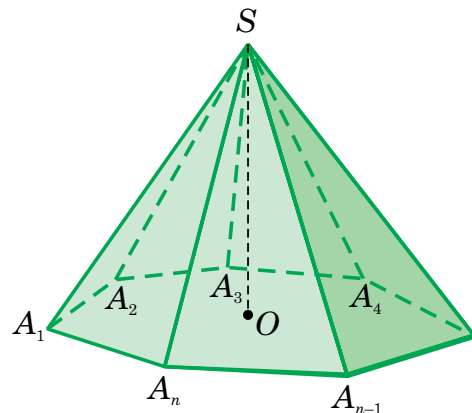
4. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 20 см, а один із катетів — 12 см.
5. Ребро куба зменшили в 3 рази. У скільки разів зменшився об'єм куба?

III. Об'єм піраміди

Об'єм V піраміди з висотою, що дорівнює h , і основою, площа якої дорівнює $S_{\text{осн}}$, обчислюють за формулою

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h,$$

$$V = \frac{1}{3} S_{A_1 A_2 \dots A_n} \cdot SO.$$

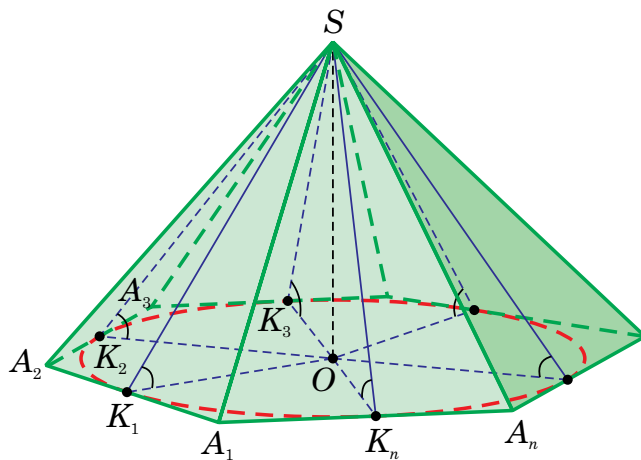


IV. Особливі випадки пірамід:

- бічні грані піраміди нахилені до основи під рівними кутами;
- бічні ребра піраміди утворюють рівні кути з площиною основи;
- дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи;
- одна бічна грань піраміди перпендикулярна до основи.

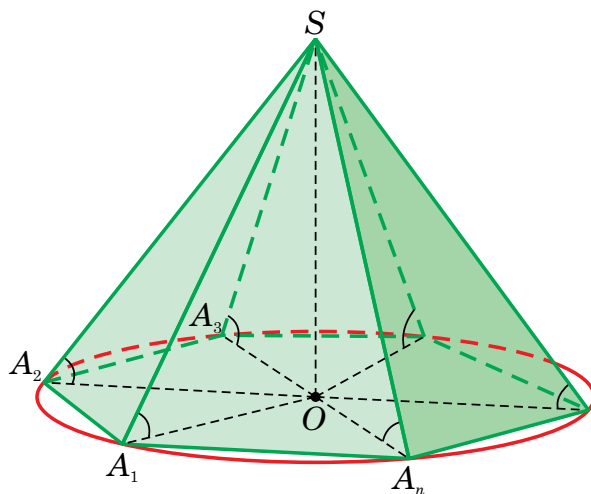
1) Якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні, то основою висоти є центр кола, вписаного в основу піраміди.

Якщо у піраміди рівні двогранні кути при основі, то $S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$, де S_6 — площа бічної поверхні піраміди, $S_{\text{осн}}$ — площа основи, α — двогранний кут при основі піраміди.

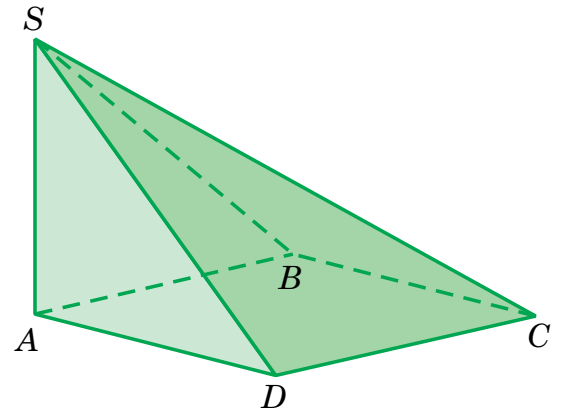


2) Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то основою висоти є центр кола, описаного навколо основи піраміди.

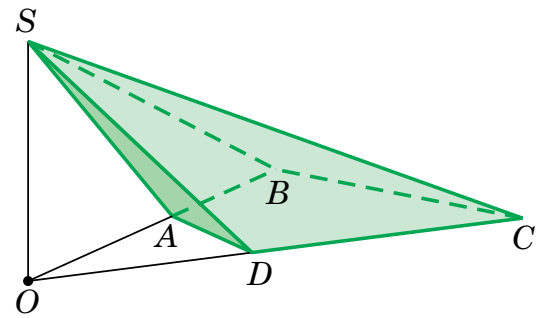
3) Якщо всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом, то основою висоти є центр кола, описаного навколо основи піраміди.



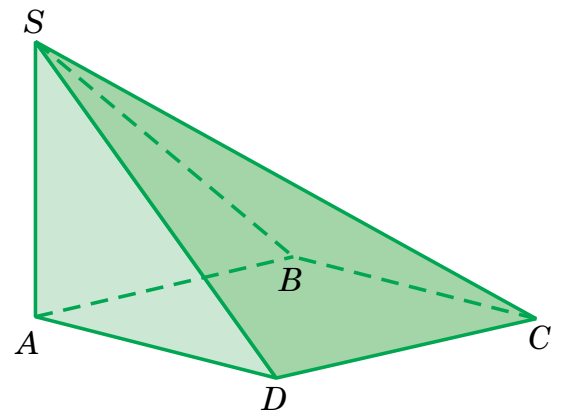
4) Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою буде їхнє спільне бічне ребро.



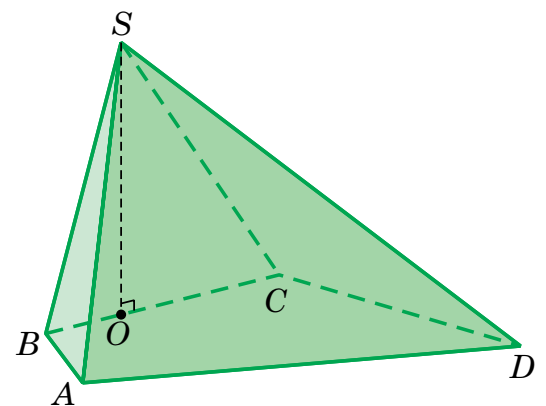
5) Якщо дві несуміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди буде відрізок прямої, по якій перетинаються площини цих граней.



6) Якщо бічне ребро піраміди перпендикулярне до основи піраміди, то висота піраміди збігається із цим бічним ребром.



7) Якщо бічна грань піраміди перпендикулярна до основи піраміди, то висота піраміди збігається із висотою цієї бічної грані.



V. Розв'язування тестових завдань ЗНО/НМТ

Приклад 1. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, апофема — 13 см.

Обчисліть об'єм (у см^3) цієї піраміди. (ЗНО, 2020 р.).

Розв'язання. Нехай $SABCD$ — дана піраміда в основі якої лежить квадрат $ABCD$. O — центр квадрата. M — середина ребра AD (див. рисунок).

Оскільки всі бічні грані правильної піраміди є рівнобедреними трикутниками, то SM — апофема даної піраміди. Із прямокутного трикутника SMO , за теоремою Піфагора:

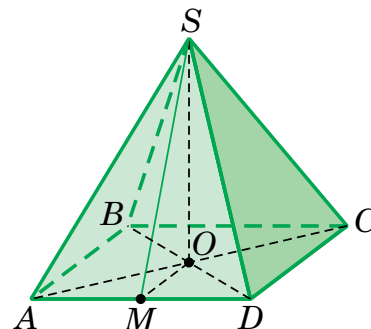
$$OM = \sqrt{SM^2 - SO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (см)}.$$

OM — середня лінія трикутника ADC , тому сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 10 (см).

$$S_{ABCD} = 100 \text{ см}^2.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. 400 см^3 .



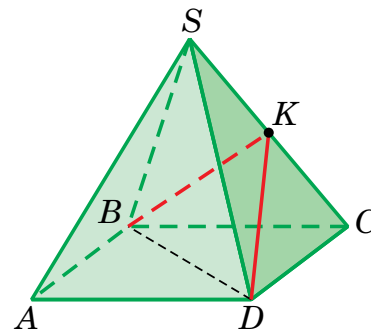
Приклад 2. Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 м^3 . Точка K — середина ребра SC . Обчисліть об'єм піраміди $KBCD$ (у м^3). (ЗНО, 2007 р.).

Розв'язання. Площа основи піраміди $KBCD$ удвічі менша від площі основи піраміди $SABCD$, і висота піраміди $KBCD$ удвічі менша від висоти піраміди $SABCD$.

Таким чином, об'єм піраміди $KBCD$ вчетверо менший від об'єму піраміди $SABCD$.

$$\text{Отже, об'єм піраміди } KBCD \text{ дорівнює } \frac{6}{4} = 1,5 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Відповідь. 1,5 м^3 .



VI. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У прямокутній системі координат у просторі задано трикутну піраміду $SABC$ з вершиною $S(0; 0; 9)$. Основою піраміди є прямокутний рівнобедрений трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), що лежить у площині xOy , $A(-8; 10; 0)$, $B(8; -2; 0)$. Знайдіть об'єм цієї піраміди. (НМТ, 2024 р.).

VII. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 36 см^2 . Визначте об'єм цієї піраміди, якщо її висота вдвічі більша за сторону основи. (ЗНО, 2019 р.).

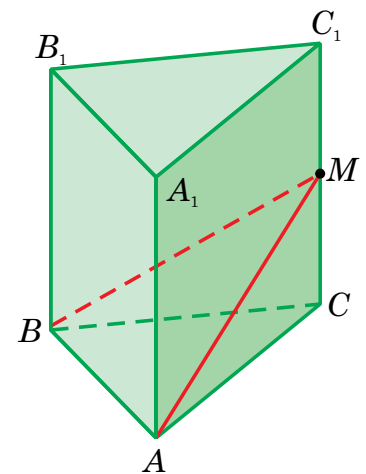
А	Б	В	Г	Д
108 см^3	144 см^3	216 см^3	288 см^3	432 см^3

2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см , а об'єм — 64 см^3 . Знайдіть висоту піраміди. (ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{3} \text{ см}$	4 см	8 см	12 см	16 см

3. Об'єм прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 48 см^3 . Точка M — середина ребра CC_1 (див. рисунок). Обчисліть об'єм піраміди $MABC$. (ЗНО, 2010 р.).

А	Б	В	Г	Д
6 см^3	8 см^3	12 см^3	16 см^3	24 см^3



4. Обчисліть об'єм піраміди, основою якої є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см . Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см .

А	Б	В	Г	Д
576 см^3	288 см^3	256 см^3	216 см^3	192 см^3

5. Основою трикутної піраміди є рівнобедрений прямокутний трикутник із катетом a . Укажіть формулу для обчислення об'єму V цієї піраміди, якщо її висота дорівнює катету основи. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
$V = \frac{a^3}{3}$	$V = \frac{a^3}{2}$	$V = \frac{a^3}{4}$	$V = \frac{a^3}{6}$	$V = a^3$

6. Укажіть формулу для обчислення об'єму V правильної чотирикутної піраміди, сторона основи й висота якої дорівнюють a . (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
$V = \frac{a^3}{4}$	$V = a^3$	$V = \frac{a^3}{3}$	$V = \sqrt{5}a^3$	$V = \sqrt{3}a^3$

7. Площа основи трикутної піраміди дорівнює площі квадрата зі стороною 5 см. Визначте об'єм піраміди, якщо вершина віддалена на 24 см від площини основи.

А	Б	В	Г	Д
600 см ³	300 см ³	160 см ³	200 см ³	480 см ³

8. Основою чотирикутної піраміди є ромб зі стороною 10 см. Менша діагональ ромба дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм цієї піраміди, якщо її висота дорівнює стороні основи.

А	Б	В	Г	Д
640 см ³	1200 см ³	480 см ³	960 см ³	320 см ³

9. В основі прямої чотирикутної піраміди лежить прямокутник зі сторонами 6 см та 8 см, а висота піраміди дорівнює діагоналі основи. Знайдіть об'єм піраміди.

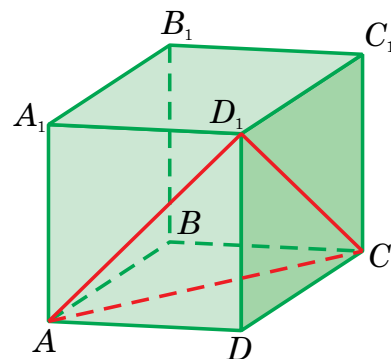
А	Б	В	Г	Д
240 см ³	$\frac{280}{3}$ см ³	480 см ³	280 см ³	160 см ³

10. В основі чотирикутної піраміди лежить ромб з діагоналями 12 см і 20 см. Знайдіть об'єм цієї піраміди, якщо її висота дорівнює 15 см.

А	Б	В	Г	Д
1600 см ³	1200 см ³	800 см ³	600 см ³	1800 см ³

Рівень В

- У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 15 см, а сторона основи — $9\sqrt{2}$ см. Визначте об'єм цієї піраміди (у см³).
- Обчисліть об'єм багатогранника (у см³), усі вершини якого лежать у центрах граней прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 см, 4 см, 5 см.
- В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 5 см, 6 см та 8 см, а всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45°. Обчисліть об'єм піраміди (у см³).
- Об'єм куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює 216 см³ (див. рисунок). Обчисліть об'єм піраміди $D_1 ACD$ (у см³). (ЗНО, 2009 р.).



- Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см і нахилена під кутом 60° до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди.
- Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює 30°. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди (у см²), якщо радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює 3 см. (ЗНО, 2010 р.).

7. Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см, гострий кут — 30° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини її основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм піраміди (у см^3). (ЗНО, 2010 р.).
8. Діагональним перерізом правильної чотирикутної піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною 6. Визначте об'єм V цієї піраміди. У відповідь запишіть значення $\frac{V}{\sqrt{3}}$. (НМТ, 2023 р.).
9. Діагональним перерізом правильної чотирикутної піраміди є прямокутний трикутник. Визначте об'єм цієї піраміди (у см^3), якщо площа її основи дорівнює 288 см^2 .
10. Основою піраміди є прямокутний трикутник із кутом 30° і протилежним йому катетом, який дорівнює 3 см. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60° . Знайдіть висоту піраміди.

Рівень С

1. Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Бічна грань SBC , площа якої дорівнює $24,4 \text{ см}^2$, перпендикулярна до площини основи піраміди. Точка M — середина ребра SB . Площина (MAD) перетинає ребро SC в точці N . Визначте довжину відрізка MN (у см), якщо об'єм піраміди дорівнює 152 см^3 , а площа її основи — 57 см^2 . (ЗНО, 2014 р.).
2. Усі бічні грані правильної чотирикутної піраміди нахилені до площини її основи під кутом 60° . Площа повної поверхні піраміди дорівнює $54\sqrt{6} \text{ см}^2$. Обчисліть площу (у см^2) перерізу цієї піраміди площиною, що проходить через висоту піраміди й діагональ її основи. (ЗНО, 2015 р.).
3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим до нього кутом β . Бічні грані піраміди, які містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до площини основи під кутом ϕ . Знайдіть висоту піраміди. (ЗНО, 2008 р.).
4. Основою піраміди $SABC$ є гострокутний рівнобедрений трикутник ABC . $AB = BC = 18$. Грані SAC і SAB перпендикулярні до площини основи піраміди, а ребро SB нахилене до неї під кутом 30° . Визначте кут між площинами (SBC) і (ABC), якщо площа основи піраміди дорівнює 72. (ЗНО, 2016 р.).
5. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$ з гострим кутом A . Ребро SB перпендикулярне до прямих AB і BC . Проекцією ребра SD на площину основи піраміди є відрізок довжиною 10 см, який утворює зі стороною AD кут 30° . Визначте кут між площинами (SAD) і (ABC), якщо $SD = 15$ см. (ЗНО, 2017 р.).
6. У прямокутній системі координат у просторі задано правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, $A(15; 1; 10)$, $B(-1; 5; 6)$. Усі ребра піраміди рівні. Знайдіть об'єм цієї піраміди.
7. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник із кутом α при основі й радіусом вписаного кола r . Дві нерівні бічні грані перпендикулярні до основи, а третя нахилена до основи під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.
8. У піраміді $MABC$ грані MAB і MAC перпендикулярні до площини ABC , ребро $MA = 9$ см. Сторони основи піраміди дорівнюють: $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Знайдіть площу грані MBC .

9. Основа піраміди — рівнобедрена трапеція з меншою основою 7 см і гострим кутом 60° . Діагональ даної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° . Обчисліть об'єм піраміди.
10. Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$), довжина середньої лінії якої дорівнює 5 см. Бічне ребро SB перпендикулярне до площини основи піраміди і вдвічі більше за середню лінію трапеції $ABCD$. Знайдіть відстань від середини ребра SD до площини SBC (у см), якщо об'єм піраміди дорівнює 210 см^3 . (ЗНО, 2013 р.).

Рефлексія

- | | | | |
|----|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю формулу для обчислення об'єму піраміди. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, де буде основа висоти піраміди, усі бічні грані якої нахилені до основи під рівними кутами. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, де буде основа висоти піраміди, усі бічні ребра якої рівні або нахилені до основи під рівними кутами. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, де буде основа висоти піраміди, в якої дві бічні грані перпендикулярні до основи. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, де буде основа висоти піраміди, в якої одна бічна грань перпендикулярна до основи. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |







