

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 5. Циліндр. Площі бічної та повної поверхонь циліндра. Об'єм циліндра

План уроку

1. Циліндр та його елементи.
2. Розгортка циліндра.
3. Обчислення площ бічної та повної поверхонь циліндра.
4. Об'єм циліндра.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє комплексні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1-1];

визначає компоненти математичної моделі комплексної проблемної ситуації, взаємозв'язки між ними [12 МАО 2.3.1-1];

визначає, яких даних недостатньо для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-2];

висловлюється математично грамотно, змістовно, точно, лаконічно, структурує власне мовлення [12 МАО 4.3.2-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності — на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Для домашньої роботи запропонуйте розв'язати 8–10 задач із тренувальних завдань, які не були розв'язані на уроці.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) В яких повсякденних предметах ви зустрічаєте циліндричні форми?
- 2) Чому інженери та дизайнери часто обирають циліндричну форму для різних ємностей?
- 3) Які переваги і недоліки має циліндрична форма у порівнянні з призмою?
- 4) Як би ви розрахували час наповнення циліндричного балона водою, якщо відома швидкість потоку води?
- 5) Як би ви визначили кількість фарби, необхідної для фарбування зовнішньої поверхні резервуара циліндричної форми?

II. Повторення (Усно) (5 хв)

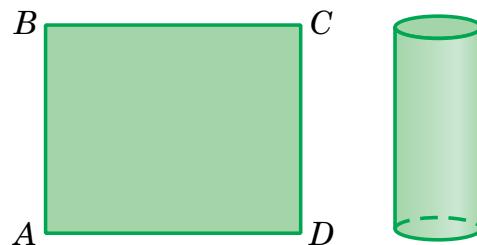
1. Точка M лежить поза площиною трикутника ABC . Яке взаємне розташування прямих AB і MC ?
Відповідь. Мимобіжні.
2. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$ см, $BC = 18$ см. Знайдіть $\operatorname{tg} \angle A$.
Відповідь. 6.
3. Обчисліть об'єм правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а висота — 9 см.
Відповідь. $27\sqrt{3}$ см³.
4. Знайдіть відношення площ поверхонь двох сфер, радіуси яких дорівнюють 5 см і 10 см.
Відповідь. 1 : 4.

5. Яку найменшу кількість граней може мати призма?

Відповідь. 5.

Як я вирішую певну проблему?

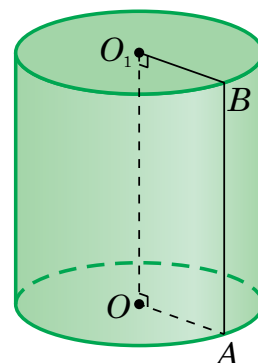
Задача. Лист заліза, що має форму прямокутника $ABCD$ ($AB = 50$ см), згортають таким чином, щоб отримати циліндричну трубу (див. рис.). Краї AB і CD зварюють між собою без накладання одного краю на інший. Обчисліть площу бічної поверхні отриманого циліндра (труби), якщо діаметр його основи дорівнює 20 см. Виберіть відповідь, найближчу до точної. Товщиною листа заліза та швом від зварювання знехтуйте.



А	Б	В	Г	Д
1570 см ²	3150 см ²	5240 см ²	6300 см ²	1000 см ²

III. Циліндр та його елементи (2 хв)

Означення. *Циліндром* або *круговим циліндром* називається тіло, яке складається з двох кругів, що не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів.



Рівні круги, що лежать у паралельних площинах, — **основи** циліндра. Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл, які обмежують основи, — **твірні** циліндра.

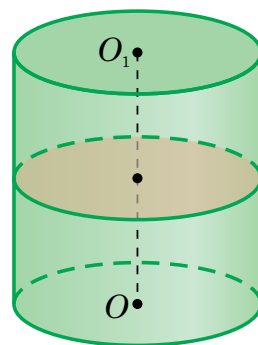
Радіус циліндра — це радіус його основи.

Висота циліндра — перпендикуляр, проведений з однієї точки основи циліндра до площини іншої основи.

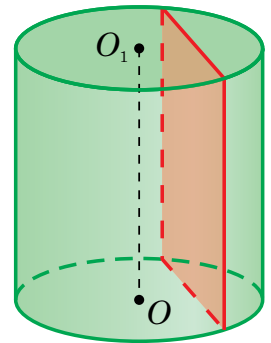
Точки O і O_1 — центри основ циліндра, OA і O_1B — радіуси циліндра, відрізок AB — твірна циліндра, яка дорівнює висоті циліндра (для прямого циліндра).

Пряма OO_1 — вісь циліндра.

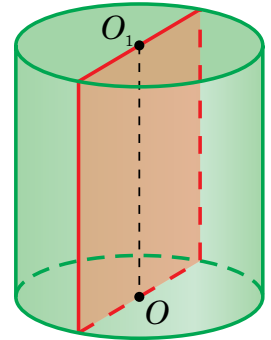
Переріз циліндра площиною, паралельною площині основи, є кругом.



Переріз циліндра площиною, яка паралельна його осі, є прямокутником, оскільки твірні циліндра рівні й паралельні осі циліндра.



Осьовий переріз циліндра — це прямокутник, якому належить вісь циліндра.



Циліндр утворюється обертанням прямокутника навколо однієї зі сторін.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 6.** Довжина відрізка, що з'єднує дві точки кіл основ циліндра і перетинає вісь, дорівнює 10 см. Знайдіть радіус циліндра, якщо його висота дорівнює 8 см.

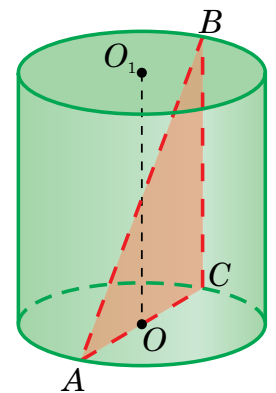
Розв'язання. Нехай AB — даний відрізок, який перетинає вісь циліндра. Через пряму AB і вісь циліндра OO_1 проведемо площину, BC — твірна циліндра, що лежить у цій площині. Оскільки твірна дорівнює висоті, то $BC = 8$ см.

Із трикутника ABC , за теоремою Піфагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ (см)}.$$

AC — діаметр основи, тому радіус циліндра дорівнює 3 см.

Відповідь. 3 см.



- 7.** Висота циліндра дорівнює 24 см. Переріз циліндра, паралельний осі й віддалений від неї на 5 см, є квадратом. Знайдіть площу основи циліндра.

Розв'язання. Нехай квадрат $ABDC$ — даний переріз, M — середина відрізка AB .

$OM \perp AB$ (у трикутнику AOB медіана OM є висотою).

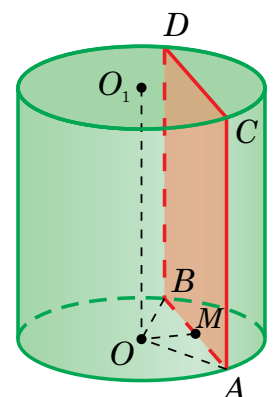
Пряма BD — перпендикулярна до площини основи, тому $OM \perp BD$.

Отже, медіана OM перпендикулярна до площини ABC , тому відрізок OM є відстанню від осі циліндра до даного перерізу.

Оскільки $ABCD$ — квадрат, то $AB = BD = 24$ см, тому $AM = 12$ см.

Із прямокутного трикутника AOM за теоремою Піфагора:

$$OA = \sqrt{OM^2 + MA^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (см)}.$$



Площа основи циліндра: $\pi \cdot 13^2 = 169\pi$ (см²).

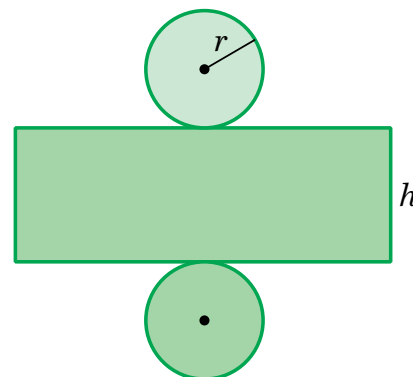
Відповідь. 169π см².

IV. Розгортка циліндра (2 хв)

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і деякій твірній, а потім розгорнути на площині, то отримаємо розгортку циліндра.

Geogebra-аплет, що допоможе краще зрозуміти утворення розгортки:

<https://www.geogebra.org/m/WwTVKuVe> ____



Ілюстративні приклади (7 хв)

8. Квадрат, діагональ якого дорівнює 4π см, є розгорткою бічної поверхні циліндра. Знайдіть площу основи цього циліндра.

Розв'язання. Сторона квадрата дорівнює $\frac{4\pi}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\pi$ (см).

Одна зі сторін перерізу є довжиною кола основи, тому $2\pi r = 2\sqrt{2}\pi$, $r = \sqrt{2}$ см.

Площа основи $\pi r^2 = 2\pi$ (см²).

Відповідь. 2π см².

V. Обчислення площ бічної та повної поверхонь циліндра (2 хв)

Площа бічної поверхні циліндра S_6 дорівнює площі розгортки його бічної поверхні:

$$S_6 = 2\pi r h,$$

де h — висота циліндра, r — радіус його основи.

Площею повної поверхні циліндра називають суму площ бічної поверхні та двох його основ:

$$S_{\Pi} = S_6 + 2S_{\text{осн}}.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

9. Прямокутник зі сторонами 1 см і 3 см обертається навколо більшої сторони. Знайдіть повну поверхню тіла обертання.

Розв'язання. Якщо прямокутник обертається навколо більшої сторони, то висота циліндра h дорівнює 3 см, а радіус основи r дорівнює 1 см.

Площа основи дорівнює $\pi \cdot 1^2 = \pi$ (см²).

Площа бічної поверхні: $S_6 = 2\pi r h = 2\pi \cdot 1 \cdot 3 = 6\pi$ (см²).

$S_{\Pi} = S_6 + 2S_{\text{осн}} = 6\pi + 2\pi = 8\pi$ (см²).

Відповідь. 8π см².

- 10.** Площі бічної і повної поверхонь циліндра відносяться, як 2 : 3. Знайдіть кут між діагоналями осевого перерізу.

Розв'язання. Нехай $S_{\text{б}} = 2x$, $S_{\text{п}} = 3x$, h — висота циліндра, r — радіус його основи, тоді: $h = 2r$, тобто осевим перерізом є квадрат, а отже, кут між діагоналями дорівнює 90° .

Відповідь. 90° .

VI. Об'єм циліндра (1 хв)

Об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи циліндра та його висоти: $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. Оскільки $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, то $V = \pi r^2 h$.

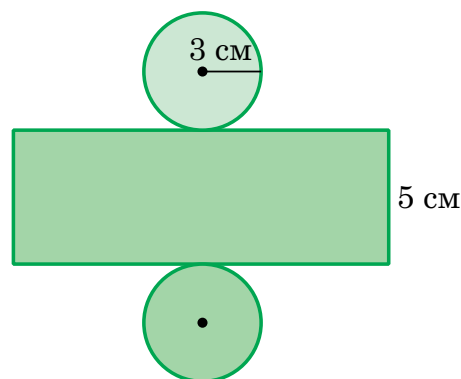
Ілюстративні приклади (5 хв)

- 11.** На рисунку зображено розгортку циліндра. Знайдіть його об'єм. (ЗНО, 2011 р.).

Розв'язання. Висота h даного циліндра дорівнює 5 см, а радіус циліндра r дорівнює 3 см.

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. $45\pi \text{ см}^3$.



- 12.** В основі циліндра проведено хорду, яка стягує дугу 60° . Відрізок, що сполучає центр іншої основи із серединою цієї хорди, дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 30° . Обчисліть об'єм циліндра.

Розв'язання. Нехай AB — дана хорда, M — її середина. Дуга AB становить 60° , тому центральний кут $\angle AOB = 60^\circ$. Звідки трикутник AOB — рівносторонній.

$OM \perp AB$ (у трикутнику AOB медіана OM є висотою),

$O_1M \perp AB$ — за теоремою про три перпендикуляри, тому $\angle OMO_1$ — кут між O_1M і площиною основи.

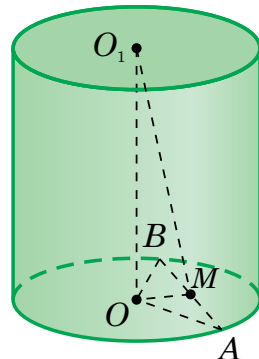
$$\triangle MOO_1: \cos \angle OMO_1 = \frac{OM}{O_1M}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OM}{10}, \quad OM = 5\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$\sin \angle OMO_1 = \frac{OO_1}{O_1M}, \quad \frac{1}{2} = \frac{OO_1}{10}, \quad OO_1 = 5 \text{ см.}$$

$$\triangle OAM: \sin \angle OAM = \frac{OM}{OA}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{OA}, \quad OA = 10 \text{ см.}$$

$$V = \pi \cdot OA^2 \cdot OO_1 = \pi \cdot 100 \cdot 5 = 500\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

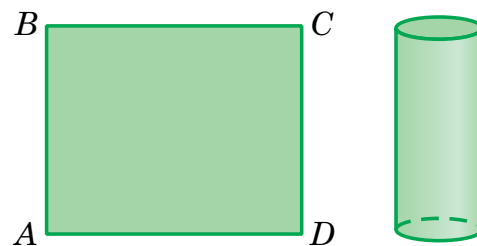
Відповідь. $500\pi \text{ см}^3$.



VII. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Лист заліза, що має форму прямокутника $ABCD$ ($AB = 50$ см), згортають таким чином, щоб отримати циліндричну трубу (див. рис.). Краї AB і CD зварюють між собою без накладання одного краю на інший. Обчисліть площу бічної поверхні отриманого циліндра (труби), якщо діаметр його основи дорівнює 20 см. Виберіть відповідь, найближчу до точної. Товщиною листа заліза та швом від зварювання знехтуйте. (ЗНО, 2015 р.).



А	Б	В	Г	Д
1570 см ²	3150 см ²	5240 см ²	6300 см ²	1000 см ²

Розв'язання. Радіус кола основи дорівнює 10 см.

Довжина кола основи дорівнює 20π см.

На розгортці довжина кола основи дорівнює стороні AD прямокутника $ABCD$.

Отже, площа бічної поверхні даного циліндра становить $50 \cdot 20\pi = 1000\pi$ (см²).

Для наближеного обчислення врахуємо, що $\pi \approx 3,14$. Отримаємо, що площа бічної поверхні наближено дорівнює 3140 см². Відповідь, найближча до точної, — 3150 см².

Відповідь. Б.

VIII. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ (10–15 хв)

Рівень А

1. Площа осевого перерізу циліндра, в якому висота дорівнює діаметру основи, дорівнює 36 см². Знайдіть площу основи циліндра.

А	Б	В	Г	Д
36π см ²	9 см ²	6π см ²	9π см ²	36 см ²

2. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, радіус якого 3 см, а висота — 7 см.

А	Б	В	Г	Д
30π см ²	60π см ²	40π см ²	120π см ²	15π см ²

3. Периметр осевого перерізу циліндра дорівнює 20 см. Висота циліндра утричі більша за його радіус. Знайдіть площу осевого перерізу.

А	Б	В	Г	Д
12 см ²	6 см ²	32 см ²	16 см ²	24 см ²

4. Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа його основи дорівнює $9\pi \text{ см}^2$, а висота дорівнює діаметру.

А	Б	В	Г	Д
$18\pi \text{ см}^3$	$27\pi \text{ см}^3$	$32\pi \text{ см}^3$	$54\pi \text{ см}^3$	$81\pi \text{ см}^3$

5. Прямокутник зі сторонами 8 см і 3 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть площу бічної поверхні тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
$16\pi \text{ см}^2$	$32\pi \text{ см}^2$	$48\pi \text{ см}^2$	$64\pi \text{ см}^2$	$24\pi \text{ см}^2$

6. Діагональ осового перерізу циліндра дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$12\pi \text{ см}^3$	$12\sqrt{6}\pi \text{ см}^3$	$6\sqrt{6}\pi \text{ см}^3$	$24\sqrt{6}\pi \text{ см}^3$	$12\sqrt{3}\pi \text{ см}^3$

7. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює $15\pi \text{ см}^2$. Знайдіть площу осового перерізу циліндра.

А	Б	В	Г	Д
5 см^2	$7,5 \text{ см}^2$	15 см^2	30 см^2	45 см^2

8. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює $24\pi \text{ см}^2$, а його об'єм — $48\pi \text{ см}^3$. Обчисліть висоту циліндра.

А	Б	В	Г	Д
12 см	6 см	4 см	3 см	2 см

9. Об'єм циліндра дорівнює $8\pi\sqrt{5} \text{ см}^3$, а висота — $2\sqrt{5}$ см. Знайдіть діагональ осового перерізу.

А	Б	В	Г	Д
3 см	4 см	$2\sqrt{6}$ см	6 см	12 см

10. Знайдіть повну поверхню циліндра з радіусом 5 см і висотою 15 см.

А	Б	В	Г	Д
$375\pi \text{ см}^2$	$100\pi \text{ см}^2$	$400\pi \text{ см}^2$	$200\pi \text{ см}^2$	$150\pi \text{ см}^2$

Рівень В

1. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом 120° , а з центра верхньої основи — під кутом 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо довжина хорди становить 6 см.
2. Потрібно пофарбувати бічну поверхню бака циліндричної форми з діаметром основи 1,5 м і висотою 3 м. Скільки потрібно фарби, якщо на один квадратний метр витрачається 200 г? Відповідь запишіть у кілограмах, число π округліть до сотих.

3. Бічна поверхня циліндра дорівнює S , а довжина кола основи дорівнює C . Знайдіть об'єм циліндра.
4. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа утвореного перерізу S .
5. Скільки бочок заввишки 1,5 м з діаметром основи 0,8 м потрібно, щоб перелити у них воду з циліндричної цистерни, яка має довжину 4,5 м і діаметр основи 1,6 м. Уважайте, що бочки мають циліндричну поверхню.
6. Радіус циліндра дорівнює 5 см. Переріз, паралельний осі циліндра й віддалений від неї на 4 см, має площу 42 см^2 . Знайдіть висоту циліндра.
7. Яку кількість нафти (в тоннах) уміщує циліндрична цистерна з діаметром 18 м і висотою 7 м, якщо густина нафти $0,85 \text{ г/см}^3$? Використайте формулу $m = \rho V$, де V — об'єм нафти, ρ — густина нафти. Відповідь заокругліть до цілих.
8. У циліндрі висота h дорівнює радіусу r основи. Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює площі повної поверхні циліндра.
9. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом α . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з одним із кінців проведеної хорди, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм циліндра, якщо відстань від центра нижньої основи до проведеної хорди дорівнює a .
10. Знайдіть площу поверхні циліндра, якщо діаметр його основи дорівнює d , а із центра іншої основи цей діаметр видно під кутом α .

Рівень С

1. Паралельно осі циліндра, радіус основи якого $6\sqrt{2}$ см, проведено площину, що перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу 90° . Знайдіть площу перерізу, якщо кут між діагоналлю перерізу та вказаною хордою дорівнює 60° .
2. Паралельно осі циліндра, бічна поверхня якого дорівнює Q , проведено площину. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу перерізу, якщо відрізок, який сполучає центр основи циліндра з точкою кола іншої основи, утворює з площиною основи кут α .
3. Площа перерізу циліндра площиною, яка перпендикулярна твірній, дорівнює S . Площа осевого перерізу циліндра дорівнює Q . Обчисліть об'єм циліндра.
4. Паралельно осі циліндра проведено площину. Вона перетинає основу по хорді, яка стягує дугу 2α . Діагональ перерізу утворює з площиною основи кут β , а його площа дорівнює S . Обчисліть площу основи циліндра.
5. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині площі його повної поверхні. Діагональ осевого перерізу дорівнює 5 см. Знайдіть повну поверхню циліндра.
6. Прямокутник обертається навколо однієї зі сторін. Площа прямокутника дорівнює S . Точка перетину діагоналей прямокутника описує коло, довжина якого C . Знайдіть об'єм тіла обертання.
7. Кінці відрізка AB завдовжки 25 см лежать на колах основ циліндра. Знайдіть відстань від даного відрізка до осі циліндра, якщо висота циліндра дорівнює 15 см, а радіус — 26 см.

8. Паралельно до осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R .
9. Із квадрата, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{\pi}$, згорнута бічна поверхня циліндра. Знайдіть площу основи циліндра.
10. Криниця має форму циліндра, діаметр основи якого дорівнює 1,2 м, а глибина — 3 м. Вона наповнена водою на $\frac{2}{3}$ глибини. Обчисліть з точністю до 0,01 м³ об'єм води у криниці.

IX. Рефлексія (1 хв)

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке циліндр. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію, як утворюються тіла обертання, зокрема циліндр. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, яку форму має розгортка поверхні циліндра. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, формули для обчислення площ бічної та повної поверхонь циліндра. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я умію, обчислювати об'єм циліндра. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |