

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 6. Урок–практикум. Циліндр. Задачі на обчислення площ поверхонь та об'єму циліндра

План уроку

1. Задачі на обчислення площ бічної та повної поверхонь циліндра.
2. Задачі на обчислення об'єму циліндра.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє комплексні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1-1];

пропонує ідеї щодо способу розв'язання комплексних проблемних ситуацій, зокрема пов'язаних із питаннями екологічної безпеки та сталого розвитку суспільства [12 МАО 2.2.1-1];

визначає, яких даних недостатньо для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-2];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі та шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1];

висловлюється математично грамотно, змістовно, точно, лаконічно, структурує власне мовлення [12 МАО 4.3.2-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово упродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності — на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Для домашньої роботи запропонуйте розв'язати 8–10 задач із тренувальних завдань, які не були розв'язані на уроці.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чому банки для напоїв роблять у формі циліндра, а не у формі призми? Які переваги це надає виробникам і споживачам?
- 2) Як знання формули об'єму циліндра допомагає при бурінні свердловин?
- 3) Як зміниться площа поверхні циліндра та його об'єм, якщо одночасно зменшити висоту вдвічі та подвоїти радіус циліндра?
- 4) Чи можна виміряти об'єм циліндричної цистерни, якщо ви фізично не можете виміряти її висоту?
- 5) Яка формула дозволяє обчислити масу циліндричного стовпа, якщо відома густина матеріалу, з якого виготовлений стовп?

II. Повторення (Усно) (5 хв)

1. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 12$ см, $\sin \angle A = 0,6$, $\sin \angle C = 0,4$. Знайдіть сторону BC .
Відповідь. 18 см.
2. Точка M віддалена від площини α на 15 см. З цієї точки проведено до площини α похилу MK . Знайдіть довжину цієї похилої, якщо її проекція на площину α дорівнює 8 см.
Відповідь. 17 см.

3. Обчисліть об'єм призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 6 см і 4 см та кутом 45° , а висота призми дорівнює $7\sqrt{2}$ см.
Відповідь. 168 см^3 .
4. Обчисліть об'єм піраміди, основою якої є прямокутний трикутник із катетами 9 см і 12 см, а висота піраміди дорівнює 18 см.
Відповідь. 324 см^3 .
5. Чому дорівнює об'єм циліндра, діаметр основи якого дорівнює 6 см, а твірна циліндра — 7 см?
Відповідь. $63\pi \text{ см}^3$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У прямокутній системі координат у просторі задано циліндр, осьовим перерізом якого є квадрат $ABCD$, $C(8; -13; 10)$. Точка $O(4; -3; 2)$ ділить відрізок AD навпіл. Обчисліть об'єм V цього циліндра. У відповідь запишіть значення $\frac{V}{\pi}$. (НМТ, 2024 р.).

III. Задачі на обчислення площ бічної та повної поверхонь циліндра

Площа S_6 бічної поверхні циліндра:

$$S_6 = 2\pi rh,$$

де r — радіус основи циліндра, h — його висота.

Площа S_{Π} повної поверхні циліндра:

$$S_{\Pi} = S_6 + 2S_{\text{осн}},$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи циліндра.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Довжина кола основи циліндра дорівнює 18π см. Визначте площу бічної поверхні цього циліндра, якщо його висота дорівнює 7 см. (ЗНО, 2014 р.).

Розв'язання. Довжину кола можна обчислити за формулою $C = 2\pi r$, звідки $18\pi = 2\pi r$, $r = 9$ см.

$$S_6 = 2\pi rh = 18\pi \cdot 7 = 126\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. $126\pi \text{ см}^2$.

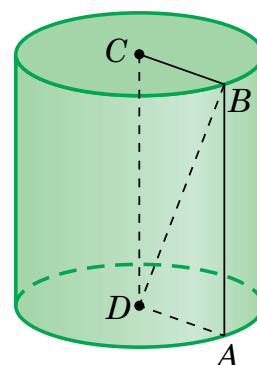
7. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням квадрата з діагоналлю $5\sqrt{2}$ см навколо його сторони.

Розв'язання. $BC = AD = R$. Оскільки $ABCD$ — квадрат, то $AB = CD = R$.

Діагональ квадрата у $\sqrt{2}$ разів більша за його сторону, тому $AB = BC = CD = AD = 5$ см.

$$S_6 = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 5 = 50\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. $50\pi \text{ см}^2$.



8. Скільки кілограмів фарби необхідно, щоб пофарбувати колону циліндричної форми, якщо діаметр її основи дорівнює 63 м, висота — 38 дм? Відомо, що на один квадратний метр поверхні колони витрачається 200 г фарби. Для наближеного обчислення $\pi \approx 3,14$.

Розв'язання. $H = 38$ дм $= 3,8$ м, $d = 63$ м, $2\pi rh = \pi dh$.

$$S_{\text{с}} = 3,14 \cdot 63 \cdot 3,8 \approx 751,72 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Отже, для фарбування колони фарби потрібно: $751,72 \cdot 0,2 = 150,34$ (кг).

Відповідь. 150,34 кг.

9. Через точки A і B_1 , що лежать на колах нижньої та верхньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину паралельно осі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа утвореного перерізу — $60\sqrt{2}$ см². Визначте довжину відрізка AB_1 (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює $20\sqrt{30}\pi$ см². (ЗНО, 2014 р.).

Розв'язання. За умовою, AA_1B_1B — площина, паралельна OO_1 . Цією площиною є прямокутник з діагоналлю AB_1 — відрізком, довжину якого потрібно знайти. OH — відстань від центра нижньої основи до цієї площини, $OH = 2$ см. Площа прямокутника AA_1B_1B дорівнює $60\sqrt{2}$ см². Тоді $AB \cdot AA_1 = 60\sqrt{2}$ (см²).

Нехай $AA_1 = h$, $AB = x$. Маємо $h \cdot x = 60\sqrt{2}$.

Площа бічної поверхні циліндра дорівнює $20\sqrt{30}\pi$ см², тобто

$$2\pi rh = 20\sqrt{30}\pi, \text{ звідси } rh = 10\sqrt{30} \text{ або } h = \frac{10\sqrt{30}}{r}.$$

Оскільки $h \cdot x = 60\sqrt{2}$, то $\frac{10\sqrt{30}}{r} \cdot x = 60\sqrt{2}$, звідси $\frac{x}{r} = \frac{6}{\sqrt{15}}$ або $r = \frac{\sqrt{15}}{6}x$.

Розглянемо прямокутний трикутник OHA , у якому $AH = 0,5x$, $OA = r$, $OH = 2$.

Тоді $r^2 - \frac{x^2}{4} = 4$, $\frac{15x^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 4$, $x^2 = 24$, $x = 2\sqrt{6}$. Отже, $AB = 2\sqrt{6}$ (см).

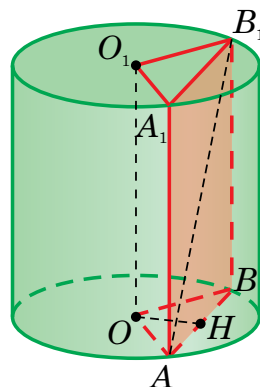
Із рівності $h \cdot x = 60\sqrt{2}$ маємо: $2\sqrt{6}h = 60\sqrt{2}$, $h = 10\sqrt{3}$ (см).

Отже, $AA_1 = 10\sqrt{3}$ см.

Відрізок AB_1 знайдемо як діагональ прямокутника AA_1B_1B :

$$AB_1^2 = (2\sqrt{6})^2 + (10\sqrt{3})^2, \quad AB_1 = \sqrt{4 \cdot 6 + 100 \cdot 3} = 18 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 18 см.



IV. Задачі на обчислення об'єму циліндра

Об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи циліндра та його висоти: $V = S_{\text{осн}} h$.

Оскільки $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, то $V = \pi r^2 h$.

Ілюстративні приклади (7 хв)

- 10.** Об'єм циліндра дорівнює 72π см³. Знайдіть висоту цього циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 3 см. (ЗНО, 2014 р.).

Розв'язання. $V = \pi r^2 h$, $72\pi = \pi \cdot 3^2 \cdot h$, $h = \frac{72\pi}{9\pi} = 8$ (см).

Відповідь. 8 см.

- 11.** Циліндр вписано в куб. Відомо, що об'єм куба дорівнює 40 см³. Обчисліть об'єм циліндра.

Розв'язання. Оскільки об'єм куба дорівнює 40 см³, то $a^3 = 40$ см³, де a — ребро куба.

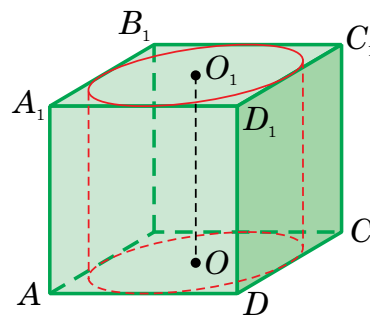
$V = \pi r^2 h$,

де r — радіус основи циліндра $r = \frac{a}{2}$,

H — висота циліндра, $H = a$.

Тоді $V = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{4} = \frac{\pi \cdot 40}{4} = 10\pi$ (см³).

Відповідь. 10π см³.



- 12.** Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм циліндра.

Розв'язання. Оскільки осьовий переріз циліндра є квадратом, то висота циліндра дорівнює діаметру його основи. Діагональ квадрата у $\sqrt{2}$ разів більша за його сторону. Тоді сторона квадрата дорівнює 4 см. Отже, висота циліндра дорівнює 4 см, радіус кола основи циліндра — 2 см.

Об'єм циліндра обчислимо за формулою: $V = \pi r^2 h$.

Таким чином, $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$ (см³).

Відповідь. 16π см³.

V. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** У прямокутній системі координат у просторі задано циліндр, осьовим перерізом якого є квадрат $ABCD$, $C(8; -13; 10)$. Точка $O(4; -3; 2)$ ділить відрізок AD навпіл.

Обчисліть об'єм V цього циліндра. У відповідь запишіть значення $\frac{V}{\pi}$. (НМТ, 2024 р.).

$$OC = \sqrt{(8-4)^2 + (-13-(-3))^2 + (10-2)^2} = \sqrt{16+100+64} = \sqrt{180}.$$

Нехай $OD = x$, тоді $DC = 2x$.

За теоремою Піфагора:

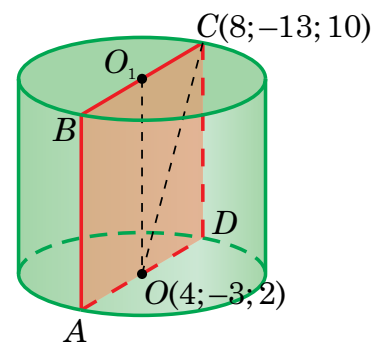
$$OD^2 + DC^2 = OC^2,$$

$$x^2 + 4x^2 = 180, 5x^2 = 180, x^2 = 36, x = 6.$$

Отже, радіус циліндра дорівнює 6, а висота — 12.

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 432\pi.$$

Відповідь. 432.



VI. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С (10–15 хв)

Рівень А

- 1.** Площа повної поверхні циліндра дорівнює 92π , а площа його бічної поверхні – 56π . Визначте площу основи цього циліндра. (ЗНО, 2020 р.).

А	Б	В	Г	Д
6π	18π	13π	48π	36π

- 2.** Укажіть формулу для обчислення площі S бічної поверхні циліндра, довжина кола якого дорівнює l , а висота — h . (ЗНО, 2020 р.).

А	Б	В	Г	Д
$S = \frac{l}{h}$	$S = 2lh$	$S = lh^2$	$S = lh$	$S = \frac{h}{l}$

- 3.** Укажіть формулу для обчислення висоти H циліндра, площа основи якого дорівнює S , а об'єм — V . (ЗНО, 2019 р.).

А	Б	В	Г	Д
$H = \frac{S}{V}$	$H = \frac{V}{S}$	$H = VS$	$H = \frac{V}{3S}$	$H = \frac{3V}{S}$

- 4.** Довжина кола основи циліндра дорівнює 18π см. Визначте площу бічної поверхні цього циліндра, якщо його висота дорівнює 7 см. (ЗНО, 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
$126\pi \text{ см}^2$	$207\pi \text{ см}^2$	$252\pi \text{ см}^2$	$288\pi \text{ см}^2$	$567\pi \text{ см}^2$

5. Циліндр, радіус основи якого дорівнює 4 см, висота — 12 см, перетнули площиною, паралельною до його основи (див. рисунок 1). Утворилося два циліндри (див. рисунок 2). Визначте суму площ повних поверхонь утворених циліндрів. (ЗНО, 2012 р.).

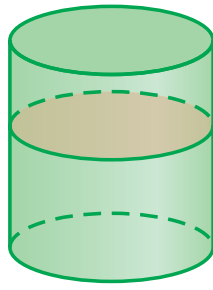


Рис. 1

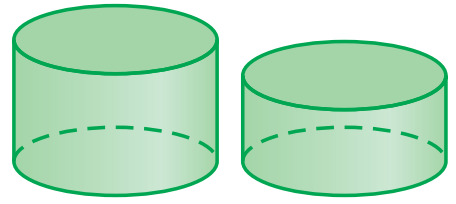


Рис. 2

А	Б	В	Г	Д
$96\pi \text{ см}^2$	$108\pi \text{ см}^2$	$128\pi \text{ см}^2$	$144\pi \text{ см}^2$	$160\pi \text{ см}^2$

6. Периметр осевого перерізу циліндра дорівнює 32 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$30\pi \text{ см}^2$	$60\pi \text{ см}^2$	$90\pi \text{ см}^2$	$120\pi \text{ см}^2$	$360\pi \text{ см}^2$

7. Укажіть формулу для обчислення площі S бічної поверхні циліндра, висота й радіус основи дорівнюють R . (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
$S = \pi R^3$	$S = \frac{\pi R^3}{3}$	$S = \pi R^2$	$S = 2\pi R^2$	$S = \frac{\pi R^2}{3}$

8. Визначте площу *повної* поверхні циліндра, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
$64\pi \text{ см}^2$	$40\pi \text{ см}^2$	$144\pi \text{ см}^2$	$56\pi \text{ см}^2$	$80\pi \text{ см}^2$

9. Визначте об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота — 10 см. (НМТ, 2022, дем.).

А	Б	В	Г	Д
$40\pi \text{ см}^3$	$\frac{40\pi}{3} \text{ см}^3$	$\frac{160\pi}{3} \text{ см}^3$	$80\pi \text{ см}^3$	$160\pi \text{ см}^3$

10. У скільки разів потрібно збільшити радіус циліндра, не змінюючи при цьому його висоту, щоб об'єм збільшився вдвічі?

А	Б	В	Г	Д
у $2\sqrt{2}$ разів	у $\sqrt{3}$ разів	у 4 рази	у 2 рази	у $\sqrt{2}$ разів

Рівень В

1. У прямокутника відношення сторін дорівнює $a : b$, $a < b$. Прямокутник спочатку обертають навколо більшої сторони, а потім — навколо меншої. Знайдіть відношення об'єму першого утвореного тіла до об'єму другого. (ЗНО, 2007 р.).

2. Переріз циліндра, проведений паралельно його осі, міститься на відстані 2 см від неї і є квадратом. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює $8\sqrt{3}\pi$ см². Знайдіть площу перерізу (у см²).
3. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням куба навколо свого ребра, довжина якого a . (ЗНО, 2006 р.).
4. Установіть відповідність між вимірами циліндра (1–3) та правильним щодо нього твердженням (А–Д). (ЗНО, 2020 р.).

Виміри циліндра

- 1 радіус основи дорівнює 6, висота — 4
- 2 радіус основи дорівнює 2, висота — 6
- 3 радіус основи дорівнює 4, висота — 6

Твердження

- А Циліндр утворено обертанням прямокутника зі сторонами 4 та 6 навколо більшої сторони.
- Б Площа основи циліндра дорівнює 12π .
- В Твірна циліндра дорівнює 4.
- Г Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 24π .
- Д Об'єм циліндра дорівнює 48π .

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

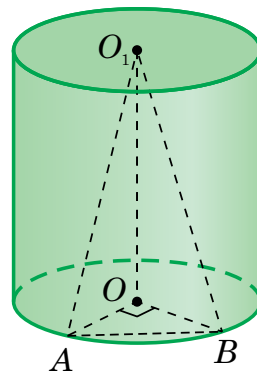
5. У циліндрі з центрами основ O і O_1 проведено хорду AB в нижній основі (див. рисунок). $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle OBO_1 = 60^\circ$. Площа основи циліндра дорівнює 9π . Установіть відповідність між величиною (1–4) та її значенням (А–Д) (ЗНО, 2017 р.).

Величина

- 1 радіус основи циліндра
- 2 довжина хорди AB
- 3 висота циліндра
- 4 об'єм піраміди O_1AOB

Значення

- А $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
- Б 3
- В $9\sqrt{3}$
- Г $3\sqrt{2}$
- Д $3\sqrt{3}$



	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

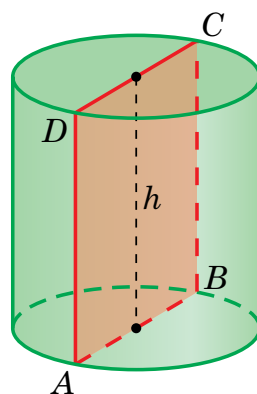
6. На рисунку зображено циліндр, радіус основи якого дорівнює 6, а висота — h . Чотирикутник $ABCD$ — осьовий переріз циліндра. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (ЗНО, 2016 р.).

Початок речення

- 1 Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 36, якщо
- 2 Площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює 42, якщо
- 3 Об'єм циліндра дорівнює 108π , якщо
- 4 Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 48π , якщо

Закінчення речення

- А $h = 3$.
- Б $h = 3,5$.
- В $h = 4$.
- Г $h = 4,5$.
- Д $h = 6$.

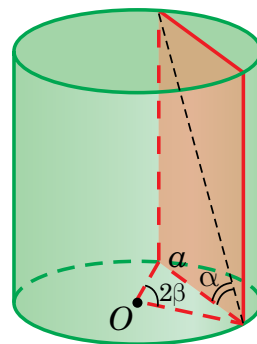


	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

7. У прямокутній системі координат у просторі задано циліндр, осьовим перерізом якого є квадрат $ABCD$. Точки $K(3; -5; 7)$ і $M(11; 1; -3)$ є серединами сторін AD і CD відповідно. Обчисліть площу S бічної поверхні цього циліндра. У відповідь запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.
8. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 8 см. Визначте площу S (у см^2) бічної поверхні цього циліндра. У відповідь запишіть значення виразу $\frac{S}{\pi}$.
9. Задано циліндр з площею основи $100\pi \text{ см}^2$. Точка M є центром верхньої основи циліндра, точка K належить колу нижньої основи циліндра. Знайдіть об'єм (у см^3) циліндра, якщо $MK = 26$ см. У відповідь запишіть значення виразу $\frac{V}{\pi}$.
10. Осьовий переріз циліндра є прямокутник, діагональ якого дорівнює 24 і утворює з площиною основи кут 30° . Визначте об'єм V цього циліндра. У відповідь запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

Рівень С

1. У циліндрі паралельно осі проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу 2β (див. рисунок). Січна площина перетинає основу по хорді, яка дорівнює a . Діагональ утвореного перерізу утворює кут α з площиною основи.
1. Знайдіть радіус даного циліндра.
 2. Знайдіть площу основи даного циліндра.
 3. Знайдіть довжину кола основи даного циліндра.
 4. Знайдіть висоту даного циліндра.
 5. Знайдіть площу бічної поверхні даного циліндра.
 6. Знайдіть об'єм даного циліндра.
2. У нижній основі циліндра проведено хорду AB , довжина якої дорівнює s . Цю хорду видно із центра верхньої основи під кутом α . Через хорду AB проведено площину β паралельно осі циліндра на відстані d ($d \neq 0$) від неї. (ЗНО, 2019 р.).
1. Зобразіть переріз циліндра площиною β та вкажіть його вид.
 2. Обґрунтуйте відстань d .
 3. Визначте площу цього перерізу.
3. У циліндрі паралельно до його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 2α . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи циліндра під кутом β . Визначити об'єм циліндра, якщо площа перерізу дорівнює Q .
4. У пряму призму вписано циліндр, площа бічної поверхні якого дорівнює 10π . Основа призми — ромб із кутом 45° . Відстань між віссю циліндра і діагоналлю бічної грані призми дорівнює $\sqrt{2}$. Знайдіть об'єм призми.
5. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a , а висота призми — H . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, який описано навколо призми.



6. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює 120° , і віддалений від осі циліндра на 3 см. Знайдіть об'єм циліндра, якщо діагональ отриманого перерізу дорівнює 12 см.
7. Через одну твірну циліндра проведено два перерізи, кут між площинами яких дорівнює 120° , а площі отриманих перерізів дорівнюють по 48 см^2 . Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 8 см.
8. Об'єм циліндра дорівнює V . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут φ . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.
9. У циліндр, радіус основи якого дорівнює 7 см, під кутом до осі вписано квадрат так, що всі вершини квадрата лежать на колах основ. Знайдіть об'єм циліндра, якщо сторона квадрата дорівнює 10 см.
10. Скільки тонн сталевих труб пішло на спорудження газопроводу завдовжки 4450 км, якщо його зовнішній діаметр 1420 мм, а товщина труби 22 мм? Густина сталі 7600 кг/м^3 .

VII. Рефлексія (1 хв)

1. Я умію розв'язувати задачі на знаходження площ бічної і повної поверхонь циліндра.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я розумію, як розв'язувати задачі на знаходження об'єму циліндра.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
3. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач ЗНО/НМТ.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----