

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 7. Конус. Площі бічної та повної поверхонь конуса. Об'єм конуса

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

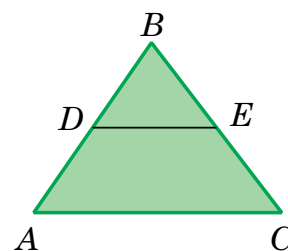
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте, що таке конус;
- 2) зрозумієте, як утворюються тіла обертання, зокрема конус;
- 3) пригадаєте яку форму має розгортка поверхні конуса;
- 4) згадаєте формули для обчислення площ бічної та повної поверхонь конуса;
- 5) відновите в пам'яті формулу для обчислення об'єму конуса;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування задач для підготовки до ЗНО/НМТ.

II. Повторення (Усно)

1. Відрізок DE — середня лінія трикутника ABC , зображеного на рисунку. Чому дорівнює відношення площі трикутника DBE до площі трикутника ABC ?



2. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат зі стороною 8 см.
3. Прямі a і b — паралельні. Як розташована пряма a відносно площини α , якщо пряма b перетинає площину α ?

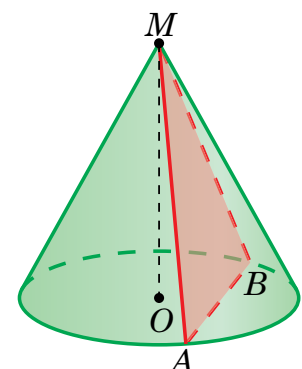
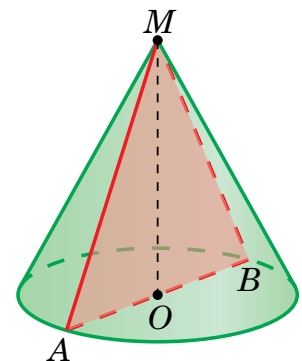
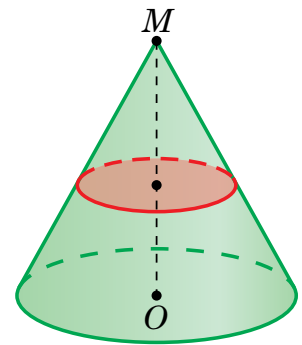
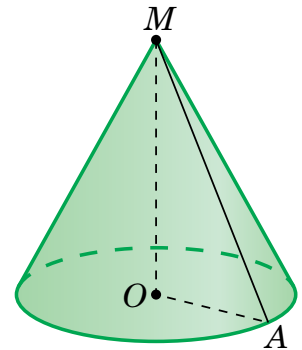
4. Обчисліть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 7 см, а твірна циліндра — 5 см.
5. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 9 см?

III. Конус та його елементи

Означення. Конусом (круговим конусом) називається тіло, яке складається з круга — **основи конуса**, точки, що не належить площині цього круга, — **вершини конуса**, й усіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи. Відрізки, які сполучають вершину конуса з точками кола основи, називають **твірними конуса**.

Точка O — центр основи конуса, точка M — вершина конуса, A — точка кола основи, MA — твірна конуса, OA — радіус основи конуса, пряма MO — вісь конуса, відрізок MO — висота конуса.

Якщо конус перетнути площиною, яка паралельна основі конуса, то в перерізі отримаємо круг.



Якщо конус перетнути площиною, яка проходить через вісь конуса, то утворюється осьовий переріз AMB (див. рисунок).

Трикутник AMB є рівнобедреним, $MA = MB$ — твірні конуса, AB — діаметр основи конуса.

Через будь-які дві твірні конуса можна провести площину, яка також утворює рівнобедрений трикутник.

AMB — рівнобедрений трикутник.

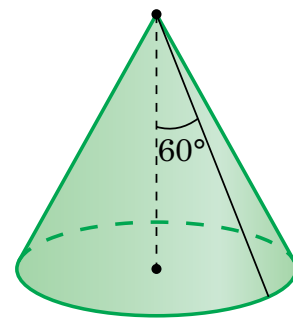
Інші перерізи конуса площинами не розглядатимемо.

Конус утворюється обертанням прямокутного трикутника навколо прямої, що містить один із катетів цього трикутника.

Приклад 1. Радіус основи конуса дорівнює r , твірна — l . Твірна утворює з висотою конуса кут 60° (див. рисунок). Визначте $\frac{r}{l}$.

(ЗНО, 2020 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{r}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$	$\frac{r}{l} = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{r}{l} = 2$	$\frac{r}{l} = \sqrt{3}$



Розв'язання. У прямокутному трикутнику синусом гострого кута є відношення протилежного катета до гіпотенузи, тобто $\frac{r}{l} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

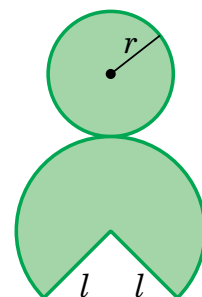
Відповідь. А.

IV. Розгортка конуса

Якщо поверхню конуса розрізати по колу основи та деякій твірній, а потім розгорнути на площині, то отримаємо розгортку конуса. Вона складається з круга, що дорівнює основі конуса, і кругового сектора, який називають розгорткою бічної поверхні конуса.

Geogebra-аплет, що допоможе краще зрозуміти утворення розгортки:

<https://www.geogebra.org/m/knvt9KK>



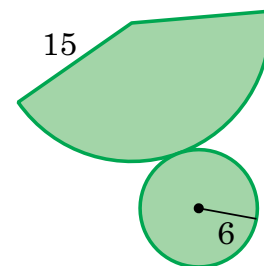
Приклад 2. На рисунку зображено розгортку конуса. Визначте відношення площі повної поверхні цього конуса до площі його бічної поверхні. (ЗНО, 2008 р.).

Розв'язання. Нехай l , R — твірна і радіус конуса, тоді $l = 15$,

$$R = 6 \text{ і } \frac{S_{\text{п}}}{S_{\text{б}}} = \frac{\pi R^2 + \pi Rl}{\pi Rl} = \frac{\pi R^2}{\pi Rl} + 1 = \frac{R}{l} + 1 = \frac{6}{15} + 1 = 0,4 + 1 = 1,4 \text{ або } 7 : 5.$$

7 : 5.

Відповідь. 1,4 або 7 : 5.



V. Обчислення площ бічної та повної поверхонь конуса

Площа бічної поверхні конуса $S_{\text{б}}$ дорівнює площі розгортки його бічної поверхні:

$$S_{\text{б}} = \pi r l,$$

де l — твірна конуса, r — радіус його основи.

Площа повної поверхні конуса дорівнює сумі площ бічної поверхні та його основи:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн}}.$$

$$S_{\text{п}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

Приклад 3. Знайдіть висоту конуса, радіус основи якого дорівнює 8 см, а площа повної поверхні — 144π см².

Розв'язання. $S_{\text{п}} = \pi r(l + r)$, де l — твірна конуса, r — радіус його основи.

$$144\pi = \pi \cdot 8(l + 8), \quad 18 = l + 8, \quad l = 10 \text{ (см)}.$$

За теоремою Піфагора, $l^2 = h^2 + r^2$,
 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ (см).
 Відповідь. 6 см.

VI. Об'єм конуса

Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі основи конуса та його висоти:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Оскільки $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, то $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Приклад 4. Трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см обертається навколо більшої сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

Розв'язання. Якщо сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см, то трикутник — прямокутний. Прямокутний трикутник обертається навколо гіпотенузи. Тоді утворяться два конуси зі спільною основою. Виконаємо побудову (див. рисунок).

Трикутник ACB — прямокутний із прямим кутом C . CO — висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи. $\triangle ACB = \triangle AC_1B$, звідси $CO = C_1O$. Отже, відрізок CC_1 — діаметр основи конусів, що утворилися. Знайдемо CO як висоту h , проведену до гіпотенузи, за формулою $h = \frac{ab}{c}$, де a і b — катети, c — гіпотенуза.

Тоді $h = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$ (см).

Нехай $AC = 8$ см, $BC = 6$ см.

Із прямокутного трикутника ACO знайдемо катет AO :

$$AO = \sqrt{AC^2 - CO^2} = \sqrt{8^2 - 4,8^2} = 6,4 \text{ (см)}.$$

Тоді $BO = AB - AO = 10 - 6,4 = 3,6$ (см).

Таким чином, $AO = 6,4$ см — висота більшого конуса, $BO = 3,6$ см — висота меншого конуса. $CO = C_1O = 4,8$ см — радіуси основи конусів.

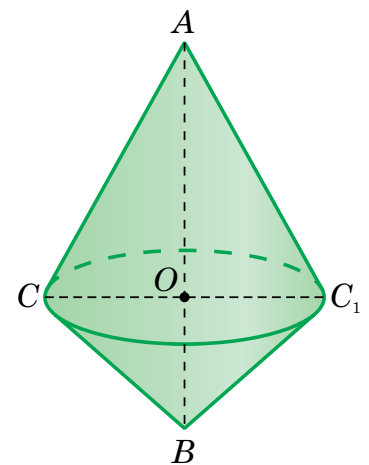
Знайдемо об'єми конусів за формулою $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 4,8^2 \cdot 6,4 = 49,152\pi \text{ (см}^3\text{)},$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 4,8^2 \cdot 3,6 = 27,648\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Отже, об'єм усієї фігури обертання становить $49,152\pi + 27,648\pi = 76,8\pi$ (см³).

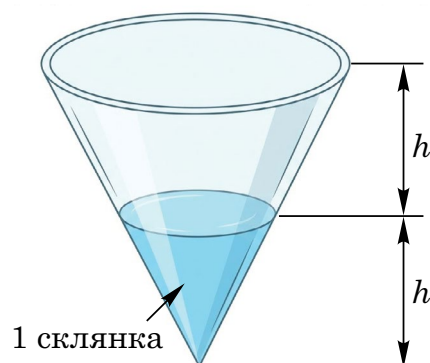
Відповідь. $76,8\pi$ см³.



VII. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На рисунку зображено ємність, у яку налито одну склянку рідини. Обчисліть, на яку кількість повних склянок рідини розрахована ця ємність. (ЗНО, 2005 р.).



Задача 2. Дах силосної башти мав форму конуса. Висота даху становить 3 м, а діаметр башти — 8 м. Знайдіть площу поверхні даху. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
$12\pi \text{ м}^2$	$15\pi \text{ м}^2$	$20\pi \text{ м}^2$	$80\pi \text{ м}^2$	$40\pi \text{ м}^2$

VIII. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Твірна конуса дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

А	Б	В	Г	Д
$8\pi\sqrt{3} \text{ см}^2$	$16\pi\sqrt{3} \text{ см}^2$	$16\pi \text{ см}^2$	$12\pi \text{ см}^2$	$8\pi \text{ см}^2$

2. Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 6 см, а один із гострих кутів дорівнює 30° , обертається навколо більшого катета. Знайдіть радіус основи конуса, утвореного внаслідок цього обертання.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{2} \text{ см}$	3 см	$3\sqrt{3} \text{ см}$	6 см	2 см

3. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а кут між твірною конуса та площиною основи — 30° . Знайдіть висоту конуса.

А	Б	В	Г	Д
6 см	$2\sqrt{3} \text{ см}$	$4\sqrt{3} \text{ см}$	$12\sqrt{3} \text{ см}$	$6\sqrt{3} \text{ см}$

4. У конусі радіус основи і його висота відповідно дорівнюють 4 см і 3 см. Знайдіть площу осевого перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
8 см^2	9 см^2	10 см^2	12 см^2	24 см^2

5. Зерно зсипали в купу конічної форми заввишки 1,2 м. Яка маса цієї купи, якщо радіус її основи дорівнює 3 м, а маса 1 м^3 зерна становить 750 кг? Укажіть відповідь, найближчу до точної.

А	Б	В	Г	Д
7600 кг	8200 кг	8400 кг	8480 кг	9020 кг

6. Площа основи конуса дорівнює $36\pi \text{ см}^2$, а його твірна — 10 см. Обчисліть бічну поверхню конуса.

А	Б	В	Г	Д
120 см^2	$60\pi \text{ см}^2$	$120\pi \text{ см}^2$	$80\pi \text{ см}^2$	$160\pi \text{ см}^2$

7. Прямокутний трикутник із гіпотенузою 8 см і гострим кутом 30° обертається навколо катета, протилежного даному куту. Знайдіть об'єм тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
$27\pi \text{ см}^3$	$32\pi \text{ см}^3$	$64\pi \text{ см}^3$	$72\pi \text{ см}^3$	$144\pi \text{ см}^3$

8. Твірна конуса дорівнює 14 см, а кут при вершині осевого перерізу — 60° . Знайдіть повну поверхню конуса.

А	Б	В	Г	Д
$98\pi \text{ см}^2$	147 см^2	$49\pi \text{ см}^2$	$149\pi \text{ см}^2$	$147\pi \text{ см}^2$

9. Площа бічної поверхні конуса дорівнює $260\pi \text{ см}^2$. Твірна конуса дорівнює 26 см. Обчисліть синус кута між твірною і висотою конуса.

А	Б	В	Г	Д
0,5	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{13}$

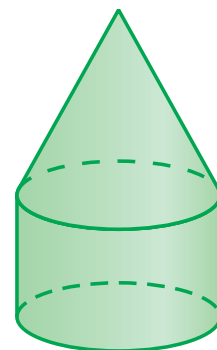
10. Відношення площі основи конуса до площі осевого перерізу дорівнює π . Знайдіть кут нахилу твірної конуса до основи.

А	Б	В	Г	Д
15°	75°	30°	60°	45°

Рівень В

1. Висота конуса дорівнює 24 см. На відстані 8 см від вершини конуса проведено переріз, паралельний площині основи конуса. Знайдіть менший із відрізків, на які даний переріз ділить твірну завдовжки 30 см.
2. Площа основи конуса удвічі більша за площу круга, діаметром якого є твірна конуса. Знайдіть площу осевого перерізу конуса, якщо висота конуса дорівнює 1 см.

3. Трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см обертається навколо більшої сторони. Обчисліть площу поверхні обертання.
4. Хорда основи конуса дорівнює a і стягує дугу α . Відрізок, який з'єднує вершину конуса із серединою хорди, нахилений до основи під кутом β . Знайдіть об'єм конуса.
5. Катет прямокутного трикутника дорівнює a , а гіпотенуза — c . Трикутник обертається спочатку навколо даного катета, а потім навколо іншого катета. Знайдіть відношення об'ємів отриманих конусів.
6. Рідину з повної посудини конічної форми, висота якої дорівнює 24 см, а радіус основи — 6 см, перелили у посудину циліндричної форми, радіус основи якої дорівнює 8 см. Визначте висоту рівня води в посудині циліндричної форми. Вважайте, що обидві посудини були заповнені повністю.
7. Копиця сіна має форму конуса з конічним верхом (див. рисунок). Радіус основи копиці дорівнює 2 м, висота копиці — 3 м. Циліндрична частина має висоту 2,4 м. Знайдіть масу сіна у копиці, якщо маса 1 м^3 сіна становить 30 кг.



8. Через дві твірні конуса проведено площину, яка перетинає основу конуса по хорді завдовжки 8 см. Хорду видно з центра основи конуса під кутом 60° . Площа утвореного перерізу дорівнює 32 см^2 . Обчисліть кут між площиною перерізу та площиною основи конуса.
9. Із паперу вирізано круговий сектор із радіусом 12 см з центральним кутом 240° . Із цього сектора склали конус. Знайдіть радіус основи конуса.
10. Висота конуса дорівнює діаметру його основи. Знайдіть відношення площі його основи до площі бічної поверхні конуса.

Рівень С

1. Через вершину конуса під кутом α до площини основи проведено січну площину, яка перетинає основу конуса по хорді, яку видно з центра основи під кутом β . Точка висоти L , що міститься на відстані a від площини основи конуса, рівновіддалена від вершини та згаданої вище хорди. Знайдіть площу перерізу.
2. Кут між віссю та твірною прямого конуса дорівнює 45° , довжина радіуса основи — 6 см. Через вершину проведено січну площину, яка відтинає від кола основи дугу з кутовою величиною 60° . Знайдіть відношення площі перерізу до числа $\sqrt{7}$.
3. Радіус основи конуса дорівнює r . Дві взаємно перпендикулярні твірні ділять площу бічної поверхні конуса на частини, площі яких відносяться, як 1 : 2. Знайдіть об'єм конуса.
4. Площа бічної поверхні конуса відноситься до його основи, як $m : n$, висота конуса дорівнює h . Знайдіть площу осьового перерізу конуса.
5. Висота конуса дорівнює h . Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, центральний кут якого дорівнює 120° . Обчисліть об'єм конуса.

6. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює 60° , проведено площину. Ця площина перетинає основу конуса по хорді завдовжки 8 см, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює 90° . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
7. Висота конуса дорівнює 18 см, а площа його основи — $63\pi \text{ см}^2$. Знайдіть довжини відрізків, на які ділять висоту два перерізи, паралельні площині основи, якщо площі цих перерізів дорівнюють $7\pi \text{ см}^2$ і $28\pi \text{ см}^2$.
8. Площина перерізу конуса, яка проходить через його вершину, віддалена від середини висоти на 6 см. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює 25 см, а висота — 20 см.
9. Площа бічної поверхні конуса вдвічі більша за площу його основи. Площа осьового перерізу конуса дорівнює Q . Знайдіть об'єм конуса.
10. Рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 16 см і бічна сторона 10 см, обертається навколо бічної сторони. Знайдіть площу поверхні та об'єм тіла обертання.

Рефлексія

- | | | | |
|----|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке конус. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію, як утворюються тіла обертання, зокрема конус. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, яку форму має розгортка поверхні конуса. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю формули для обчислення площ бічної та повної поверхонь конуса. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я умію обчислювати об'єм конуса. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |







