

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 8. Урок-практикум. Конус. Задачі на обчислення площ поверхонь та об'єму конуса

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте, як розв'язувати задачі на знаходження площ бічної і повної поверхонь конуса;
- 2) повторите, як розв'язувати задачі на знаходження об'ємів конуса;
- 3) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування задач для підготовки до ЗНО/НМТ.

II. Повторення (Усно)

1. Чому дорівнює менший з кутів рівнобічної трапеції, якщо один із них у 5 разів більший за інший?
2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди — $5\sqrt{3}$ см. Обчисліть об'єм піраміди.
3. Обчисліть площу бічної поверхні правильної восьмикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а апофема — 16 см.
4. Радіуси основ циліндра і конуса рівні, висота циліндра дорівнює 8 см, а конуса — 6 см. Знайдіть відношення об'єму циліндра до об'єму конуса.
5. Радіус основи конуса дорівнює 12 см, а кут при вершині осьового перерізу — 120° . Знайдіть твірну конуса.

III. Задачі на обчислення площ бічної та повної поверхонь конуса

Площа бічної поверхні конуса S_6 дорівнює площі розгортки його бічної поверхні:

$$S_6 = \pi l r,$$

де l — твірна конуса, r — радіус його основи.

Площа повної поверхні конуса дорівнює сумі площ бічної поверхні та його основи:

$$S_{\Pi} = S_6 + S_{\text{осн.}}$$

$$S_{\Pi} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

Приклад 1. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 10 см, а довжина кола основи — 12π см. (ЗНО, 2009 р.).

Розв'язання. За умовою задачі, $l = 10$ см, $C = 2\pi R = 12\pi$ см, де l — твірна, C — довжина кола основи, R — радіус основи конуса. Тоді

$$S_6 = \pi R l = \frac{2\pi R \cdot l}{2} = \frac{C \cdot l}{2} = \frac{12\pi \cdot 10}{2} = 60\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 60π см².

Приклад 2. Прямокутний трикутник із катетами 9 см і 12 см обертається навколо більшого катета (див. рисунок). Визначте площу повної поверхні отриманого тіла обертання. (ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
324π см ²	216π см ²	180π см ²	135π см ²	81π см ²

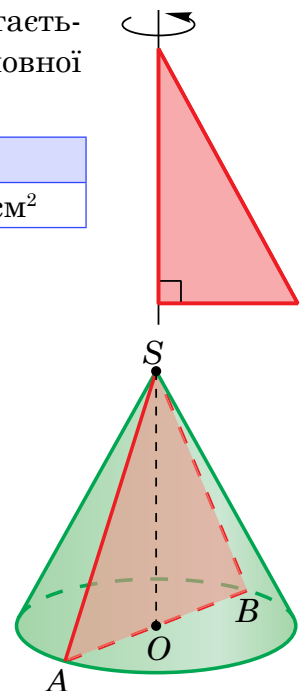
Розв'язання. Унаслідок обертання даного трикутника утвориться конус з радіусом основи $OA = 9$ см та висотою $SO = 12$ см (див. рисунок).

Твірну SA знайдемо за теоремою Піфагора:

$$SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ (см)}.$$

$$S_{\Pi} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r) = \pi \cdot 9 \cdot (15 + 9) = 216\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. Б.



Приклад 3. Найбільший кут між твірними конуса дорівнює 60° . Знайдіть відношення бічної поверхні до площі основи конуса.

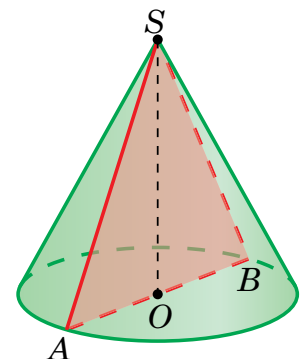
Розв'язання. Нехай задано конус, зображений на рисунку. Найбільший кут між твірними — це кут між сторонами SA і SB осьового перерізу конуса — трикутника ASB , $\angle ASB = 60^\circ$. У рівнобедреному трикутнику ASB один із кутів дорівнює 60° , тому трикутник ASB — рівносторонній, звідки $SA = SB = AB = 2r$.

$$\text{Тоді } S_6 = \pi r l = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2.$$

$$S_{\text{осн}} = \pi r^2.$$

Тому відношення площі бічної поверхні до площі основи дорівнює 2.

Відповідь. 2.



Приклад 4. Через вершину конуса проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно з вершини під кутом α , а з центра основи — під кутом β . Визначте бічну поверхню конуса, якщо відстань від центра його основи до середини твірної дорівнює d .

Розв'язання. Нехай перерізом конуса площиною є трикутник SAB , SO — висота конуса, точка M — середина твірної SA . За умовою, $\angle ASB = \alpha$, $\angle AOB = \beta$, $OM = d$. Бічна поверхня конуса $S_6 = \pi r l$, де $r = OA$ — радіус основи, $l = SA$ — довжина твірної. У прямокутному трикутнику SOA середина гіпотенузи SA , точка M , є центром описаного кола. Тому $MS = MA = MO$, звідки $SA = 2 \cdot OM = 2d$.

З вершини S проведемо перпендикуляр SN до хорди AB . За теоремою про три перпендикуляри, $ON \perp AB$. Оскільки $SA = SB$, то висота SN є бісектрисою і медіаною трикутника ASB .

Тому $\angle NSA = \frac{\alpha}{2}$ і $AN = NB$.

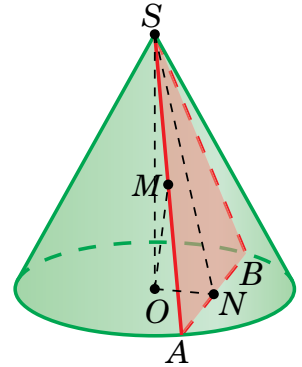
Аналогічно $\angle NOA = \frac{\beta}{2}$.

$$\triangle SNA : NA = SA \cdot \sin \angle NSA = 2d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\triangle ONA : OA = \frac{NA}{\sin \angle NOA} = \frac{2d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

$$\text{Тоді } S_6 = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{2d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot 2d = \frac{4\pi \cdot d^2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{4\pi d^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$



IV. Задачі на обчислення об'єму конуса

Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі основи конуса та його висоти:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Оскільки $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, то $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Приклад 5. Знайдіть об'єм конуса, якщо його радіус дорівнює 6 см, твірна — 10 см.
(ЗНО, 2010 р.).

А	Б	В	Г	Д
$48\pi \text{ см}^3$	$60\pi \text{ см}^3$	$96\pi \text{ см}^3$	$120\pi \text{ см}^3$	$288\pi \text{ см}^3$

Розв'язання. Зобразимо на рисунку конус з радіусом основи $r = 6$ см, твірна $l = 10$ см.

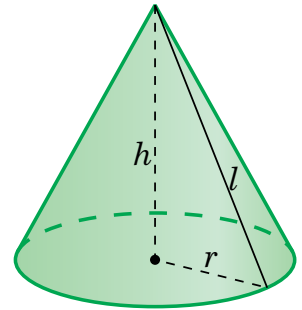
Висоту h знайдемо за теоремою Піфагора:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ (см)}.$$

Об'єм конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. В.



Приклад 6. Визначте довжину твірної конуса (у см), якщо його об'єм дорівнює $800\pi \text{ см}^3$, а площа основи — $100\pi \text{ см}^2$. (ЗНО, 2020 р.).

Розв'язання. Об'єм конуса: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, $800\pi = \frac{1}{3} 100\pi \cdot h$, $h = 24$ см.

Площа основи: $S_{\text{осн}} = \pi r^2$. $100\pi = \pi r^2$, $r = 10$ см.

Твірну конуса l знайдемо за теоремою Піфагора: $l^2 = h^2 + r^2$,

$$l = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 26 см.

Приклад 7. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a . Бічна грань утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм конуса, вписаного в піраміду.

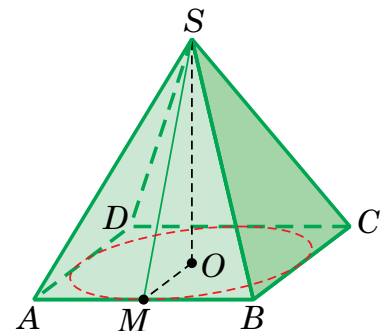
Розв'язання. Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда ($ABCD$ — квадрат, $AB = a$), у яку вписано конус. Проведемо $OM \perp AB$. Оскільки висота $SO \perp (ABC)$, то вона перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини, тому $SO \perp OM$. Тоді, за теоремою про три перпендикуляри, $SM \perp AB$. Отже, $\angle SMO = \alpha$, $r = OM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

З прямокутного трикутника SOM одержимо:

$$SO = h = OM \operatorname{tg} \angle SMO = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

$$\text{Тоді } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{24}.$$

Відповідь. $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{24}$.

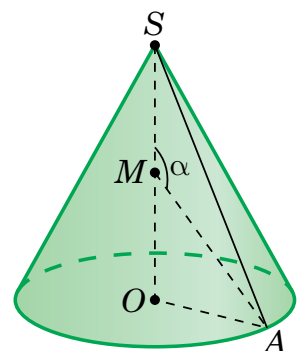


Приклад 8. Знайдіть об'єм конуса, твірну l якого видно із середини висоти конуса під кутом α .

Розв'язання. Нехай $SA = l$ — твірна конуса, SO — його висота, M — середина висоти і $\angle SMA = \alpha$ (див. рисунок). Позначимо $OA = r$. Тоді з прямокутного трикутника AMO знайдемо:

$$MO = r \operatorname{ctg} \angle AMO = r \operatorname{ctg} (180^\circ - \alpha) = -r \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$SO = 2 \cdot MO = -2r \operatorname{ctg} \alpha.$$



З $\triangle SOA$ за теоремою Піфагора маємо:

$$r^2 + (-2r \operatorname{ctg} \alpha)^2 = l^2, \quad r = \frac{l}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

Знайдемо висоту h конуса:

$$h = -2r \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2l \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

Отже, об'єм конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{l}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha}} \right)^2 \cdot \left(-\frac{2l \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha}} \right) = -\frac{2\pi l^3 \operatorname{ctg} \alpha}{3\sqrt{(1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha)^3}}.$$

Кут $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, адже $\angle AMO$ — гострий.

$$\text{Відповідь. } -\frac{2\pi l^3 \operatorname{ctg} \alpha}{3\sqrt{(1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha)^3}}, \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

V. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Цукерка має форму конуса, висота якого дорівнює 3 см, а діаметр основи — 2 см. Маса 1 см^3 шоколаду, з якого виготовлено цукерку, становить 3 г. Визначте масу 100 таких цукерок, якщо кожна цукерка є однорідною й не має всередині порожнин. Відповідь заокругліть до цілих. (ЗНО, 2016 р.).

VI. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- 1.** Укажіть формулу для обчислення V конуса, площа основи якого дорівнює S , а висота — h . (ЗНО, 2019 р.).

А	Б	В	Г	Д
$V = Sh$	$V = \frac{Sh}{2}$	$V = 4Sh$	$V = \frac{4Sh}{3}$	$V = \frac{Sh}{3}$

- 2.** Радіус основи конуса дорівнює 4, його висота — h , а твірна — l . Укажіть серед наведених правильне співвідношення для h і l . (ЗНО, 2019 р.).

А	Б	В	Г	Д
$16 + h^2 = l^2$	$4 + h = l$	$16 - h^2 = l^2$	$h^2 - l^2 = 16$	$8 + h^2 = l^2$

3. Укажіть формулу для визначення радіуса R основи конуса з твірною L , якщо площа бічної поверхні цього конуса дорівнює S . (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$R = \frac{\pi L}{S}$	$R = \frac{S}{2\pi L}$	$R = \frac{L}{\pi S}$	$R = \sqrt{\frac{3S}{\pi L}}$	$R = \frac{S}{\pi L}$

4. Визначте об'єм конуса, висота якого дорівнює 4 см, а діаметр основи — 6 см. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$12\pi \text{ см}^3$	$18\pi \text{ см}^3$	$24\pi \text{ см}^3$	$36\pi \text{ см}^3$	$72\pi \text{ см}^3$

5. Об'єм конуса дорівнює 64 см^3 . Через середину висоти цього конуса паралельно його основі проведено площину. Утворений переріз є основою меншого конуса, вершина якого збігається з вершиною заданого. Знайдіть об'єм меншого конуса. (ЗНО, 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
32 см^3	16 см^3	12 см^3	8 см^3	4 см^3

6. Діаметр основи конуса дорівнює 6 см, а площа його бічної поверхні — $24\pi \text{ см}^2$. Знайдіть довжину твірної конуса. (ЗНО, 2013 р.).

А	Б	В	Г	Д
2 см	4 см	6 см	8 см	12 см

7. Об'єм циліндра дорівнює 48 см^3 . Знайдіть об'єм конуса, радіус основи якого дорівнює радіусу основи циліндра, а висота вдвічі менша від висоти циліндра.

А	Б	В	Г	Д
6 см^3	8 см^3	16 см^3	24 см^3	36 см^3

8. Знайдіть, скільки квадратних метрів тканини потрібно, щоб укрити палатку, яка має форму конуса висотою 2 м і з радіусом основи 1,5 м.

А	Б	В	Г	Д
$3\pi \text{ м}^2$	$3,75\pi \text{ м}^2$	$5\pi \text{ м}^2$	$6\pi \text{ м}^2$	$7,5\pi \text{ м}^2$

9. Прямокутний трикутник обертається навколо катета завдовжки 3 см. Гіпотенуза трикутника дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
$16\pi \text{ см}^3$	$32\pi \text{ см}^3$	$48\pi \text{ см}^3$	$36\pi \text{ см}^3$	$72\pi \text{ см}^3$

10. Визначте об'єм конуса, твірна якого дорівнює 13 см, а висота — 12 см. (НМТ, 2024 р.).

А	Б	В	Г	Д
$156\pi \text{ см}^3$	$325\pi \text{ см}^3$	$100\pi \text{ см}^3$	$60\pi \text{ см}^3$	$300\pi \text{ см}^3$

Рівень В

1. Об'єм тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника навколо висоти, проведеної до його основи, дорівнює $320\pi \text{ см}^3$. Обчисліть довжину бічної сторони цього трикутника (у см), якщо його основа дорівнює 16 см. (ЗНО, 2015 р.).
2. Об'єм конуса дорівнює 64 см^3 . Через середину висоти цього конуса паралельно його основі проведено площину. Утворений переріз є основою меншого конуса, вершина якого збігається з вершиною заданого. Обчисліть об'єм (у см^3) меншого конуса. (НМТ, 2023 дем.).
3. Радіус основи конуса дорівнює r , а твірна — l . До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (ЗНО, 2017 р.).

Початок речення

- 1 Якщо площа бічної поверхні конуса втричі більша за площу його основи, то
- 2 Якщо висота конуса дорівнює радіусу його основи, то
- 3 Якщо проєкція твірної на площину основи конуса вдвічі менша від твірної, то
- 4 Якщо площа повної поверхні конуса дорівнює $5\pi r^2$, то

Закінчення

речення

А $l = 2r$.

Б $l = \sqrt{2}r$.

В $l = 3r$.

Г $l = 4r$.

Д $l = r$.

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4. Установіть відповідність між вимірами конуса (1–3) та правильними щодо нього твердженням (А–Д). (ЗНО, 2020 р.).

Виміри конуса

- 1 Радіус основи дорівнює 6, висота — $3\sqrt{3}$
- 2 Радіус основи дорівнює 3, висота — $3\sqrt{3}$
- 3 Радіус основи дорівнює 4, висота — 3

Твердження

А Конус утворено обертанням рівностороннього трикутника зі стороною 6 навколо його висоти.

Б Діаметр основи конуса дорівнює 12.

В Твірна конуса дорівнює 12.

Г Площа бічної поверхні конуса дорівнює 20π .

Д Об'єм конуса дорівнює $108\sqrt{3}\pi$.

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

5. Циліндр і конус мають рівні об'єми та рівні радіуси основ. Площа основи циліндра дорівнює $25\pi \text{ см}^2$, а його об'єм — $100\pi \text{ см}^3$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (ЗНО, 2018 р.).

Початок речення

- 1 Висота циліндра дорівнює
- 2 Висота конуса дорівнює
- 3 Радіус основи циліндра дорівнює
- 4 Твірна конуса дорівнює

Закінчення речення

А 4 см.

Б 5 см.

В 8 см.

Г 12 см.

Д 13 см.

А Б В Г Д

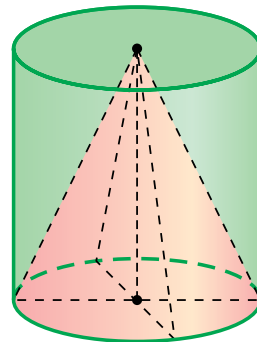
1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

6. У циліндр з радіусом основи 3 см і висотою 4 см вписано конус (див. рисунок). До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (ЗНО, 2018 р.).



Початок речення

- 1 Площа бічної поверхні циліндра дорівнює
- 2 Площа повної поверхні циліндра дорівнює
- 3 Площа основи конуса дорівнює
- 4 Площа бічної поверхні конуса дорівнює

Закінчення речення

- А $9\pi \text{ см}^2$.
- Б $12\pi \text{ см}^2$.
- В $15\pi \text{ см}^2$.
- Г $24\pi \text{ см}^2$.
- Д $42\pi \text{ см}^2$.

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

7. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник, площа якого дорівнює $27\sqrt{3} \text{ см}^2$. Визначте об'єм V (у см^3) конуса. У відповідь запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.
8. Задано конус з бічною поверхнею 260π . Відстань від центра основи конуса до середини твірної дорівнює 13. Знайдіть об'єм V цього конуса. У відповідь запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.
9. Осьовим перерізом конуса з вершиною K є трикутник ABK . На серединах твірних AK і BK відповідно вибрано точки M і P . Знайдіть об'єм (у см^3) конуса V , якщо $MK = 25 \text{ см}$, $MP = 30 \text{ см}$. У відповідь запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.
10. У прямокутній системі координат у просторі задано конус з вершиною $M(-6; -9; 7)$, осьовим перерізом якого є прямокутний трикутник AMB , $A(6; -12; 4)$. Обчисліть об'єм V цього конуса. У відповідь запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

Рівень С

1. У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і основами 18 см і 8 см, вписано конус. Знайдіть площу бічної поверхні конуса (у см^2), якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° .
2. У конус вписано піраміду, основою якої є прямокутний трикутник. Бічна грань, що містить один з катетів основи, утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди (у см^3), якщо твірна конуса дорівнює 9 см і нахилена до площини основи під кутом 45° . (ЗНО, 2014 р.).
3. Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якої дорівнює $50\sqrt{3}$, а периметр основи — 50. Визначте об'єм V цього конуса, якщо довжина його твірної дорівнює 4. У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$. (ЗНО, 2015 р.).
4. Радіус основи конуса R , твірна нахилена до площини основи під кутом α . Через вершину конуса проведено площину під кутом φ до його висоти. Ця площина перетинає основу конуса по хорді. Знайдіть площу утвореного перерізу.

5. У конусі радіус основи дорівнює R , твірна — l . Через вершину конуса й хорду його основи проведено площину β . Ця площина утворює з площиною основи конуса гострий кут α . (ЗНО, 2019 р.).
1. Зобразіть переріз конуса площиною β та вкажіть його вид.
 2. Обґрунтуйте положення кута α .
 3. Визначте периметр цього перерізу.
6. Знайдіть об'єм V тіла, яке утворюється при обертанні ромба зі стороною 1 і гострим кутом 60° навколо меншої діагоналі. У відповідь запишіть $\frac{V}{\pi}$.
7. Рівнобічну трапецію, основи якої дорівнюють 8 і 18, обертають навколо більшої основи. Знайдіть площу S поверхні тіла обертання, якщо відомо, що в цю трапецію можна вписати коло. У відповідь запишіть $\frac{S}{\pi}$.
8. Бічна поверхня конуса розгортається у чверть круга. Визначте повну поверхню цього конуса, якщо площа його осевого перерізу дорівнює $\frac{\sqrt{15}}{\pi}$.
9. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині піраміди дорівнює 60° . Визначте площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}$.
10. Знайдіть відношення висоти конуса до діаметра, якщо при заданій площі бічної поверхні він має найбільший об'єм.

Рефлексія

1. Я умію розв'язувати задачі на знаходження площ бічної і повної поверхонь конуса.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я розумію, як розв'язувати задачі на знаходження об'єму конуса.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
3. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач ЗНО/НМТ.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----







