

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 9. Куля та сфера. Площа поверхні сфери. Об'єм кулі

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

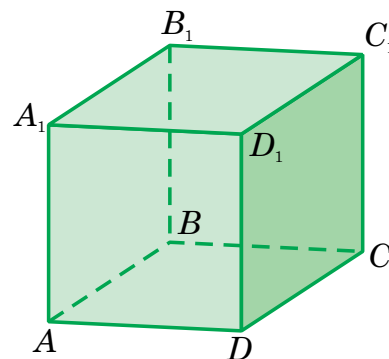
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте, що таке куля і що таке сфера;
- 2) зрозумієте, як утворюються тіла обертання, зокрема куля;
- 3) згадаєте формули для обчислення площі поверхні сфери;
- 4) відновите в пам'яті формулу для обчислення об'єму кулі;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування задач для підготовки до ЗНО/НМТ.

II. Повторення (Усно)

1. Кут між висотою ромба, проведеною з вершини тупого кута, і його меншою діагоналлю дорівнює 40° . Чому дорівнює більший з кутів ромба?
2. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть пряму перетину площини ABC_1 і площини грані $AA_1 D_1 D$.



3. Обчисліть об'єм конуса, діаметр основи якого дорівнює 12 см, а висота — 5 см.
4. Висота циліндра дорівнює 6 см, а його об'єм — 18 см^3 . Чому дорівнює площа основи циліндра?
5. Скільки сторін має правильний багатокутник, кут якого дорівнює 150° ?

III. Куля та її елементи

Означення. Кулею називається множина всіх точок простору, віддалених від даної точки на відстань, що не перевищує задану.

Дану точку називають центром кулі, а задану відстань — радіусом кулі.

Означення. Сферою називається поверхня кулі.

Отже, сфера — це множина всіх точок простору, віддалених від центра кулі або центра сфери на задану відстань R — радіус сфери.

Відрізок, що сполучає дві точки сфери називають **хордою** сфери.

Хорда, яка проходить через центр сфери, називається **діаметром сфери** або **діаметром кулі**. Кінці діаметра називають діаметрально протилежними точками.

Якщо відстань від центра кулі до площини перерізу менша за радіус кулі, то перерізом кулі даною площиною є круг. Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі до площини перерізу.

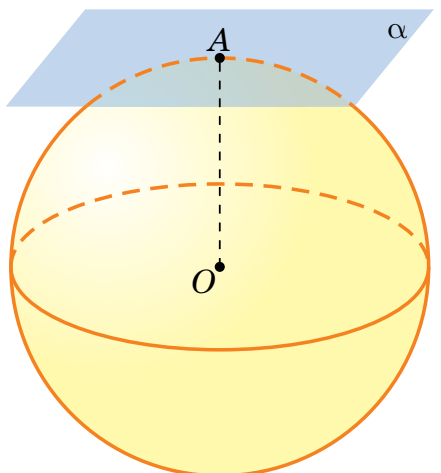
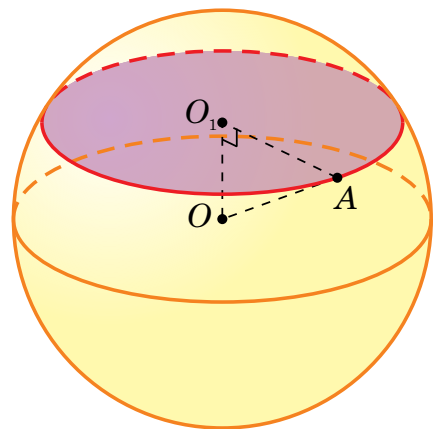
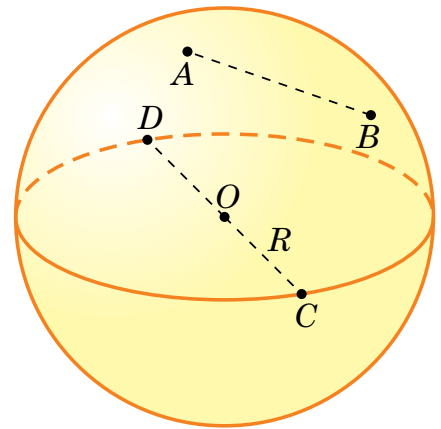
Якщо площина перерізу проходить через центр кулі, то таку площину називають діаметральною. Тоді центри кулі й круга перерізу збігаються. Діаметральна площина поділяє кулю на дві півкулі.

Переріз кулі діаметральною площиною називають великим кругом, а коло цього перерізу — великим колом.

Означення. Дотичною площиною до сфери або **кулі** називається площина, яка має зі сферою (або кулею) єдину спільну точку.

Спільна точка дотичної площини і сфери називається точкою дотику.

Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса сфери, проведеного в точку дотику.



Куля є тілом обертання, яке утворюється обертанням півкруга навколо його діаметра.

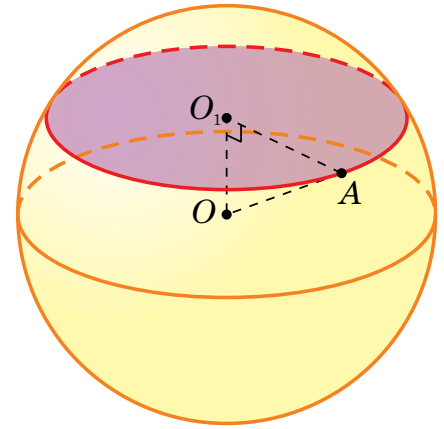
Приклад 1. Радіус кулі дорівнює 5 см. Площина проходить на відстані 3 см від центра кулі. Знайдіть площу перерізу кулі цією площиною.

Розв'язання. Площиною перерізу кулі є круг. Знайдемо радіус площини перерізу із прямокутного трикутника AOO_1 :

$$AO_1 = \sqrt{AO^2 - OO_1^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ (см)}.$$

Отже, площа перерізу $S = \pi AO_1^2 = 16\pi \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь. $16\pi \text{ см}^2$.



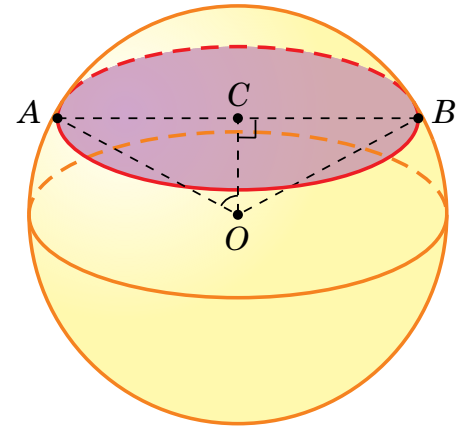
Приклад 2. Точки A і B лежать на сфері з центром O . Знайдіть радіус сфери, якщо $AB = 8\sqrt{3}$ см, $\angle AOB = 120^\circ$.

Розв'язання. Трикутник AOB — рівнобедрений, тобто його медіана OC є бісектрисою і висотою.

Радіус сфери AO знайдемо із прямокутного трикутника AOC , маючи $AC = 4\sqrt{3}$ та $\angle AOC = 60^\circ$.

$$AO = \frac{AC}{\sin \angle AOC} = 4\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 8 см.



IV. Обчислення площі поверхні сфери

Площа сфери з радіусом R обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi R^2.$$

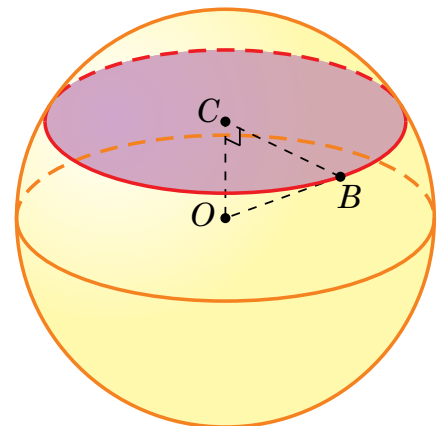
Формула означає, що площа сфери учетверо більша за площу великого круга сфери.

Приклад 3. Площина перетинає кулю по колу з радіусом r на відстані d від її центра. Знайдіть площу поверхні кулі.

Розв'язання. Нехай задано кулю з радіусом R , площина перетинає кулю по колу з центром в точці C , радіус якого дорівнює $BC = r$ на відстані $OC = d$. З прямокутного трикутника BCO , за теоремою Піфагора, $R^2 = r^2 + d^2$, звідки $R = \sqrt{r^2 + d^2}$.

Площа поверхні кулі: $S = 4\pi \cdot R^2 = 4\pi(r^2 + d^2)$.

Відповідь. $4\pi(r^2 + d^2)$.



Приклад 4. У кулі по різні боки від центра проведено два паралельні перерізи на відстані 14 см один від одного. Площі перерізів дорівнюють $64\pi \text{ см}^2$ і $36\pi \text{ см}^2$. Знайдіть площу поверхні сфери.

Розв'язання. Оскільки площі перерізів дорівнюють $64\pi \text{ см}^2$ і $36\pi \text{ см}^2$, то радіуси кругів перерізу дорівнюють 8 см і 6 см відповідно. Нехай $BO_1 = 8 \text{ см}$, $AO_2 = 6 \text{ см}$. O_1O_2 — відрізок, перпендикулярний до площин перерізу, який дорівнює 14 см.

Тоді $BO = AO = R$ — радіус кулі. Позначимо відрізок $OO_1 = x$, тоді $OO_2 = 14 - x$.

Трикутники BO_1O і AO_2O — прямокутні. Складемо вирази для визначення гіпотенуз цих трикутників, які є радіусами кулі, та прирівняємо їх:

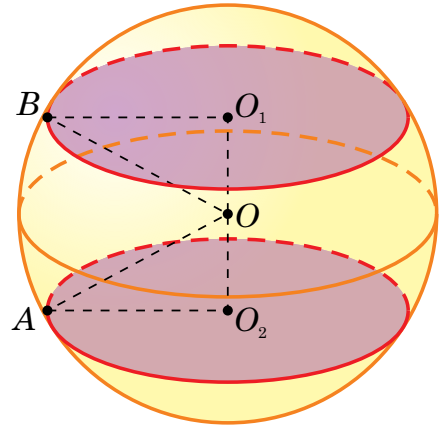
$$BO_1^2 + OO_1^2 = AO_2^2 + OO_2^2, \quad 8^2 + x^2 = 6^2 + (14 - x)^2, \quad 64 + x^2 = 36 + 196 - 28x + x^2, \quad x = 6.$$

Отже, $OO_1 = 6 \text{ см}$, $OO_2 = 8 \text{ см}$.

Знайдемо радіус кулі з рівності $R^2 = BO_1^2 + OO_1^2$, $R^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, звідси $R = 10 \text{ (см)}$.

Тоді площа поверхні сфери: $S = 4\pi R^2 = 400\pi \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь. $400\pi \text{ см}^2$.



V. Об'єм кулі

Об'єм кулі з радіусом R обчислюється за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Приклад 5. Знайдіть радіус кулі, яку переплавили з металічного куба з ребром $2\sqrt[3]{\pi} \text{ см}$. Втратою металу при переплавці знехтуйте.

Розв'язання. Об'єм даного куба дорівнює $(2\sqrt[3]{\pi})^3 = 8\pi \text{ (см}^3\text{)}$.

Об'єм отриманої кулі також дорівнює $8\pi \text{ см}^3$.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad 8\pi = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad R^3 = 6, \quad R = \sqrt[3]{6} \text{ см}.$$

Відповідь. $\sqrt[3]{6} \text{ см}$.

Приклад 6. Куля і циліндр мають однакові об'єми, а радіус основи циліндра дорівнює його висоті. Знайдіть відношення площі бічної поверхні циліндра та площі поверхні сфери.

Розв'язання. Нехай радіус основи циліндра дорівнює r , висота циліндра — h , радіус кулі — R .

Оскільки куля і циліндр мають однакові об'єми, то $\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3$.

За умовою, радіус основи циліндра дорівнює його висоті, тобто $r = h$.

$$\text{Тоді: } r^3 = \frac{4}{3}R^3 \text{ або } r = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}R.$$

Звідси $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}}$. Знайдемо відношення площі бічної поверхні циліндра до площі

поверхні сфери: $\frac{2\pi rh}{4\pi R^2} = \frac{rh}{2R^2} = \frac{r^2}{2R^2} = \frac{\sqrt[3]{16}}{2\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}$.

Відповідь. $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{9}$.

VI. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Для запобігання паркування транспорту на площі міста встановили 50 суцільних бетонних півкуль, радіус кожної з яких дорівнює 30 см. Який об'єм (у м³) бетону використано на виготовлення цих півкуль? Укажіть відповідь, найближчу до точної. (ЗНО, 2017 р.).

А	Б	В	Г	Д
2,9 м ³	5,7 м ³	8,6 м ³	2,1 м ³	17,1 м ³

VII. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. На відстані 12 см від центра кулі, радіус якої 13 см, проведено переріз. Знайдіть площу перерізу.

А	Б	В	Г	Д
5π см ²	25π см ²	10π см ²	50π см ²	15π см ²

2. У кулі на відстані 4 см від центра проведено переріз, площа якого дорівнює 9π см². Знайдіть радіус кулі.

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	5 см	6 см

3. Знайдіть площу поверхні кулі, об'єм якої дорівнює 4,5π см³.

А	Б	В	Г	Д
9 см ²	90π см ²	9π см ²	90 см ²	18π см ²

4. Знайдіть радіус сфери, яка містить усі вершини прямокутника зі сторонами 18 см і 24 см, якщо центр сфери віддалений від площини прямокутника на 8 см.

А	Б	В	Г	Д
15 см	16 см	17 см	18 см	9 см

5. Площа поверхні однієї кулі дорівнює 393 см². Знайдіть площу поверхні іншої кулі, в якій радіус у $\sqrt{3}$ рази менший, ніж у даної.

А	Б	В	Г	Д
131 см^2	$131\sqrt{3} \text{ см}^2$	$\frac{393}{\sqrt{3}} \text{ см}^2$	$\frac{131}{\sqrt{3}} \text{ см}^2$	393 см^2

6. Площа сфери дорівнює 5π . Кулю перетнули площиною, довжина кола перерізу дорівнює π . Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу.

А	Б	В	Г	Д
0,5	1	0,25	0,75	$0,5\sqrt{3}$

7. Об'єми двох куль відносяться, як $27 : 64$. Як відносяться площі їхніх поверхонь?

А	Б	В	Г	Д
$9 : 16$	$4 : 5$	$3 : 8$	$3 : 4$	$27 : 64$

8. Знайдіть довжину лінії перетину сфери з площиною, віддаленої від центра сфери на 2 см, якщо радіус сфери, проведений в одну з точок цієї лінії, утворює з даною площиною кут 30° .

А	Б	В	Г	Д
$4\pi \text{ см}$	$4\pi\sqrt{2} \text{ см}$	$8\pi \text{ см}$	$4\pi\sqrt{3} \text{ см}$	$16\pi \text{ см}$

9. Через кінець радіуса кулі проведено площину під кутом 45° до даного радіуса. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
$6\pi \text{ см}^2$	$9\pi \text{ см}^2$	$12\pi \text{ см}^2$	$18\pi \text{ см}^2$	$36\pi \text{ см}^2$

10. Площа сфери однієї кулі у 9 разів більша за площу поверхні іншої кулі. У скільки разів об'єм першої кулі більший за об'єм другої кулі?

А	Б	В	Г	Д
у 3 рази	у 9 разів	у 18 разів	у 27 разів	у 81 раз

Рівень В

- Металеву кулю з радіусом $R = \sqrt[3]{16}$ переплавили в конус, висота якого дорівнює 8. Знайдіть відношення площі бічної поверхні конуса до площі його основи.
- Площа бічної поверхні конуса дорівнює площі поверхні кулі. Знайдіть відношення їхніх об'ємів, якщо осьовий переріз конуса є прямокутним трикутником.
- Куля дотикається до сторін правильного трикутника. Знайдіть радіус кулі, якщо сторона трикутника дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а відстань від центра кулі до площини трикутника — 3 см.
- Металеву кулю переплавили на вісім рівних між собою куль. Як змінилася при цьому загальна поверхня?

5. На радіусі OA сфери із центром O позначено точки B і C так, що точка B лежить між точками O і C . Через кожну з точок B і C проведено площину, перпендикулярну до прямої OA . Кола, утворені в перерізі, мають довжини 24π см і 18π см, а відстань між цими площинами дорівнює 3 см. Знайдіть радіус сфери.
6. Куля дотикається до всіх сторін ромба з діагоналями 30 см і 40 см. Знайдіть площу перерізу кулі площиною ромба.
7. Два кола, з радіусами 30 і 40, лежать у паралельних площинах і на поверхні кулі, радіус якої 50. Знайдіть відстань між цими площинами та об'єм більшого кульового сектора, основою якого є одна з площин перерізу.
8. Куля і циліндр мають однакові об'єми, а радіус основи циліндра дорівнює його висоті. Знайдіть відношення площі бічної поверхні циліндра та площі сфери, яка обмежує задану кулю.
9. Радіуси двох куль дорівнюють 15 см і 13 см, а відстань між їхніми центрами дорівнює 14 см. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються поверхні куль.
10. Радіуси трьох куль дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює сумі об'ємів трьох заданих куль.

Рівень С

1. Радіуси двох сфер дорівнюють 10 см і 17 см, а відстань між їхніми центрами дорівнює 21 см. Знайдіть довжину лінії перетину даних сфер.
2. Через точку $B(2; -3; 6)$, яка належить сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, проведено площину, перпендикулярну до осі апікат. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі, обмеженої даною сферою.
3. У кулі проведено два паралельні перерізи, менший з яких має площу 81π см². Діаметр кулі, проведений через центри даних перерізів, ділиться ними у відношенні 2 : 7 : 1. Знайдіть об'єми найменшого кульового сегмента й кульового поясу між площинами перерізів.
4. Усі вершини рівнобедреної трапеції з бічною стороною 18 см і діагоналлю 24 см, перпендикулярною до бічної сторони, належать сфері з радіусом 25 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трапеції.
5. Відстані між центрами трьох куль, які попарно зовнішньо дотикаються, дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. Знайдіть об'єми цих куль.
6. Сума об'ємів чотирьох менших однакових куль дорівнює половині об'єму більшої кулі, а сума площ поверхонь шести менших куль на 10 см² більша за площу поверхні більшої кулі. Знайдіть радіус більшої кулі. У відповідь запишіть значення πR^2 .
7. Об'єм кулі дорівнює 288π см³. Точка лежить поза межами кулі на відстані 6 см від її поверхні. Знайдіть квадрат довжини дотичної, проведеної з цієї точки.
8. Куля дотикається до всіх сторін правильного трикутника. Знайдіть радіус кулі, якщо сторона трикутника дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а відстань від центра кулі до площини трикутника — 3 см.
9. Куля з радіусом 6 дм плаває у воді. Знайдіть висоту частини кулі, яка виступає з води, якщо густина матеріалу кулі $0,7$ г/см³.
10. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у правильний тетраедр з ребром a .

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке куля і що таке сфера. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію, як утворюються тіла обертання, зокрема куля. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю формули для обчислення площі поверхні сфери. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я умію обчислювати об'єм кулі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |







