

Повторення та підготовка до ЗНО/НМТ.

Стереометрія

Урок 9. Куля та сфера. Площа поверхні сфери. Об'єм кулі

План уроку

1. Куля та її елементи.
2. Обчислення площі поверхні сфери.
3. Об'єм кулі.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

пропонує ідеї щодо способу розв'язання комплексних проблемних ситуацій, зокрема пов'язаних із питаннями екологічної безпеки та сталого розвитку суспільства [12 МАО 2.2.1-1];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі та шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1];

висловлюється математично грамотно, змістовно, точно, лаконічно, структурує власне мовлення [12 МАО 4.3.2-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності — на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Для домашньої роботи запропонуйте розв'язати 8–10 задач із тренувальних завдань, які не були розв'язані на уроці.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чому фізики для обчислень зазвичай ідеалізують форми об'єктів, зводячи їх до сферичних?
- 2) Які переваги має сферична посудина перед іншими для зберігання газів під тиском?
- 3) Чи можна, знаючи лише довжину екватора, приблизно обчислити площу земної поверхні?
- 4) Як зміниться об'єм кулі, якщо її радіус збільшити вдвічі?
- 5) Чи можна розгорнути сферу на площину без спотворень?

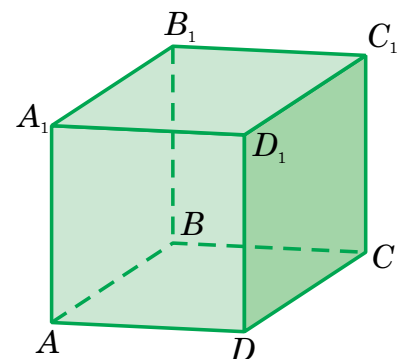
II. Повторення (Усно) (5 хв)

1. Кут між висотою ромба, проведеною з вершини тупого кута, і його меншою діагоналлю дорівнює 40° . Чому дорівнює більший з кутів ромба?

Відповідь. 100° .

2. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть пряму перетину площини ABC_1 і площини грані $AA_1 D_1 D$.

Відповідь. AD_1 .



3. Обчисліть об'єм конуса, діаметр основи якого дорівнює 12 см, а висота — 5 см.

Відповідь. $60\pi \text{ см}^3$.

4. Висота циліндра дорівнює 6 см, а його об'єм — 18 см^3 . Чому дорівнює площа основи циліндра?

Відповідь. 3 см^2 .

5. Скільки сторін має правильний багатокутник, кут якого дорівнює 150° ?

Відповідь. Дванадцять.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Для запобігання паркування транспорту на площі міста встановили 50 суцільних бетонних півкуль, радіус кожної з яких дорівнює 30 см. Який об'єм (у м^3) бетону використано на виготовлення цих півкуль? Укажіть відповідь, найближчу до точної. (ЗНО, 2017 р.).

А	Б	В	Г	Д
2,9 м^3	5,7 м^3	8,6 м^3	2,1 м^3	17,1 м^3

III. Куля та її елементи

Означення. Кулею називається множина всіх точок простору, віддалених від даної точки на відстань, що не перевищує задану.

Дану точку називають центром кулі, а задану відстань — радіусом кулі.

Означення. Сферою називається поверхня кулі.

Отже, сфера — це множина всіх точок простору, віддалених від центра кулі або центра сфери на задану відстань R — радіус сфери.

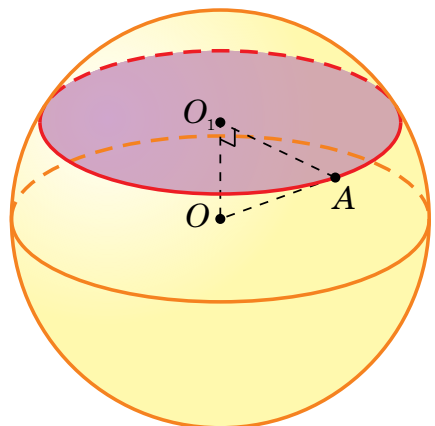
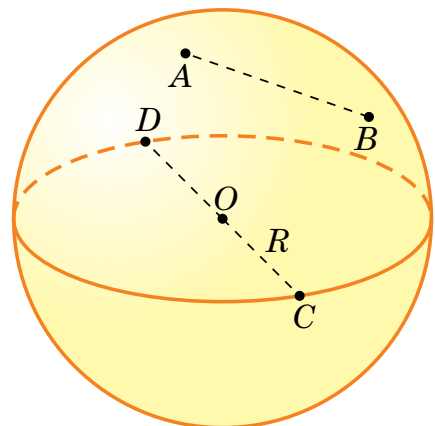
Відрізок, що сполучає дві точки сфери називають **хордою** сфери.

Хорда, яка проходить через центр сфери, називається **діаметром сфери** або **діаметром кулі**. Кінці діаметра називають діаметрально протилежними точками.

Якщо відстань від центра кулі до площини перерізу менша за радіус кулі, то перерізом кулі даною площиною є круг. Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі до площини перерізу.

Якщо площина перерізу проходить через центр кулі, то таку площину називають діаметральною. Тоді центри кулі й круга перерізу збігаються. Діаметральна площина поділяє кулю на дві півкулі.

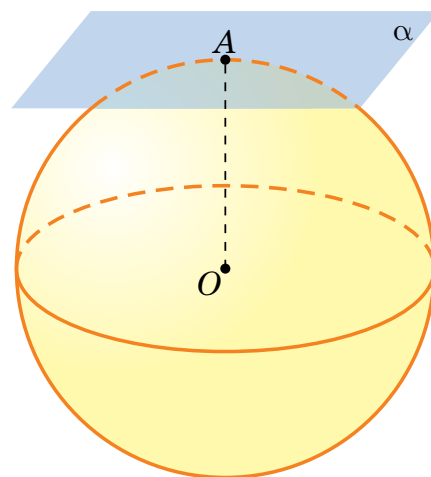
Переріз кулі діаметральною площиною називають великим кругом, а коло цього перерізу — великим колом.



Означення. *Дотичною площиною до сфери або кулі* називається площина, яка має зі сферою (або кулею) єдину спільну точку.

Спільна точка дотичної площини і сфери називається точкою дотику.

Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса сфери, проведеного в точку дотику.



Куля є тілом обертання, яке утворюється обертанням півкруга навколо його діаметра.

Ілюстративні приклади (5 хв)

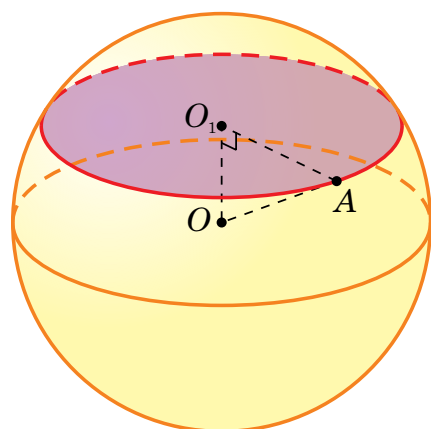
- 6.** Радіус кулі дорівнює 5 см. Площина проходить на відстані 3 см від центра кулі. Знайдіть площу перерізу кулі цією площиною.

Розв'язання. Площиною перерізу кулі є круг. Знайдемо радіус площини перерізу із прямокутного трикутника AOO_1 :

$$AO_1 = \sqrt{AO^2 - OO_1^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ (см)}.$$

Отже, площа перерізу $S = \pi AO_1^2 = 16\pi \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь. $16\pi \text{ см}^2$.



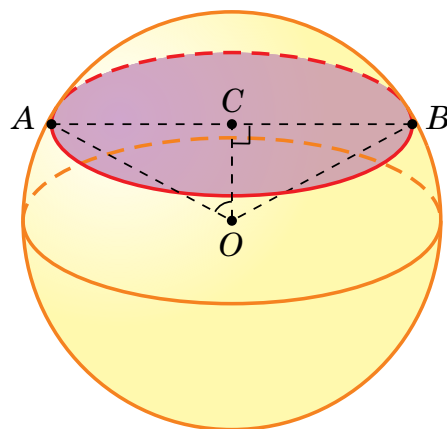
- 7.** Точки A і B лежать на сфері з центром O. Знайдіть радіус сфери, якщо $AB = 8\sqrt{3}$ см, $\angle AOB = 120^\circ$.

Розв'язання. Трикутник AOB — рівнобедрений, тобто його медіана OC є бісектрисою і висотою.

Радіус сфери AO знайдемо із прямокутного трикутника AOC, маючи $AC = 4\sqrt{3}$ та $\angle AOC = 60^\circ$.

$$AO = \frac{AC}{\sin \angle AOC} = 4\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 8 см.



IV. Обчислення площі поверхні сфери

Площа сфери з радіусом R обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi R^2.$$

Формула означає, що площа сфери учетверо більша за площу великого круга сфери.

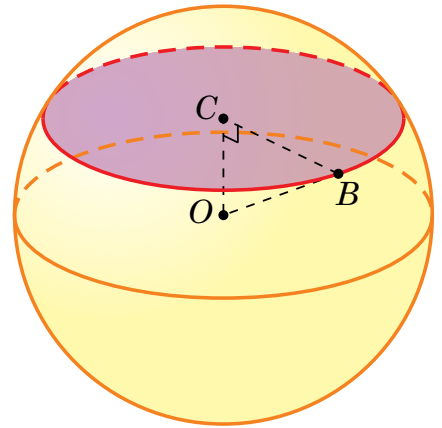
Ілюстративні приклади (5 хв)

8. Площина перетинає кулю по колу з радіусом r на відстані d від її центра. Знайдіть площу поверхні кулі.

Розв'язання. Нехай задано кулю з радіусом R , площина перетинає кулю по колу з центром в точці C , радіус якого дорівнює $BC = r$ на відстані $OC = d$. З прямокутного трикутника BCO , за теоремою Піфагора, $R^2 = r^2 + d^2$, звідки $R = \sqrt{r^2 + d^2}$.

Площа поверхні кулі: $S = 4\pi \cdot R^2 = 4\pi(r^2 + d^2)$.

Відповідь. $4\pi(r^2 + d^2)$.



9. У кулі по різні боки від центра проведено два паралельні перерізи на відстані 14 см один від одного. Площі перерізів дорівнюють $64\pi \text{ см}^2$ і $36\pi \text{ см}^2$. Знайдіть площу поверхні сфери.

Розв'язання. Оскільки площі перерізів дорівнюють $64\pi \text{ см}^2$ і $36\pi \text{ см}^2$, то радіуси кругів перерізу дорівнюють 8 см і 6 см відповідно. Нехай $BO_1 = 8 \text{ см}$, $AO_2 = 6 \text{ см}$. O_1O_2 — відрізок, перпендикулярний до площин перерізу, який дорівнює 14 см.

Тоді $BO = AO = R$ — радіус кулі. Позначимо відрізок $OO_1 = x$, тоді $OO_2 = 14 - x$.

Трикутники BO_1O і AO_2O — прямокутні. Складемо вирази для визначення гіпотенуз цих трикутників, які є радіусами кулі, та прирівняємо їх:

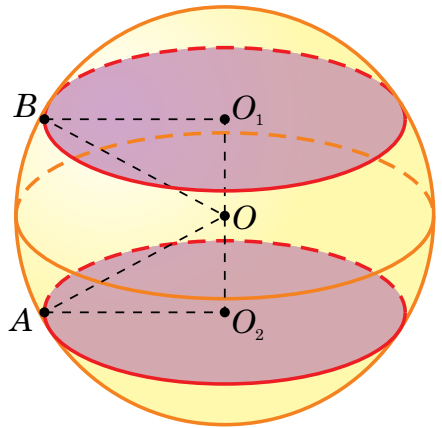
$$BO_1^2 + OO_1^2 = AO_2^2 + OO_2^2, \quad 8^2 + x^2 = 6^2 + (14 - x)^2, \quad 64 + x^2 = 36 + 196 - 28x + x^2, \quad x = 6.$$

Отже, $OO_1 = 6 \text{ см}$, $OO_2 = 8 \text{ см}$.

Знайдемо радіус кулі з рівності $R^2 = BO_1^2 + OO_1^2$, $R^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, звідси $R = 10 \text{ (см)}$.

Тоді площа поверхні сфери: $S = 4\pi R^2 = 400\pi \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь. $400\pi \text{ см}^2$.



V. Об'єм кулі

Об'єм кулі з радіусом R обчислюється за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

10. Знайдіть радіус кулі, яку переплавили з металічного куба з ребром $2\sqrt[3]{\pi}$ см. Втра-
тою металу при переплавці знехтуйте.

Розв'язання. Об'єм даного куба дорівнює $(2\sqrt[3]{\pi})^3 = 8\pi \text{ (см}^3\text{)}$.

Об'єм отриманої кулі також дорівнює $8\pi \text{ см}^3$.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad 8\pi = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad R^3 = 6, \quad R = \sqrt[3]{6} \text{ см.}$$

Відповідь. $\sqrt[3]{6}$ см.

- 11.** Куля і циліндр мають однакові об'єми, а радіус основи циліндра дорівнює його висоті. Знайдіть відношення площі бічної поверхні циліндра та площі поверхні сфери.

Розв'язання. Нехай радіус основи циліндра дорівнює r , висота циліндра — h , радіус кулі — R .

Оскільки куля і циліндр мають однакові об'єми, то $\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3$.

За умовою, радіус основи циліндра дорівнює його висоті, тобто $r = h$.

Тоді: $r^3 = \frac{4}{3}R^3$ або $r = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}R$.

Звідси $\frac{r}{R} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. Знайдемо відношення площі бічної поверхні циліндра до площі

поверхні сфери: $\frac{2\pi r h}{4\pi R^2} = \frac{r h}{2R^2} = \frac{r^2}{2R^2} = \frac{\sqrt[3]{16}}{2\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}.$

Відповідь. $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{9}$.

VI. Розв'язування нестандартних задач, які пропонувалися на ЗНО/НМТ. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Для запобігання паркування транспорту на площі міста встановили 50 суцільних бетонних півкуль, радіус кожної з яких дорівнює 30 см. Який об'єм (у м³) бетону використано на виготовлення цих півкуль? Укажіть відповідь, найближчу до точної. (ЗНО, 2017 р.).

А	Б	В	Г	Д
2,9 м ³	5,7 м ³	8,6 м ³	2,1 м ³	17,1 м ³

Розв'язання. Об'єм однієї півкулі обчислимо за формулою $V = \frac{2}{3}\pi R^3$, де $R = 0,3$ м — радіус цієї півкулі.

Для 50 півкуль помножимо отриманий результат на 50.

$$V_{50} = \frac{100}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \approx \frac{100 \cdot 3,14 \cdot 27}{3 \cdot 1000} = \frac{9 \cdot 3,14}{10} = 2,826 \text{ м}^3.$$

Відповідь, найближча до точної, — 2,9 м³.

Відповідь. А.

VII. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ. Три рівні складності: А, В, С (10–15 хв)

Рівень А

1. На відстані 12 см від центра кулі, радіус якої 13 см, проведено переріз. Знайдіть площу перерізу.

А	Б	В	Г	Д
$5\pi \text{ см}^2$	$25\pi \text{ см}^2$	$10\pi \text{ см}^2$	$50\pi \text{ см}^2$	$15\pi \text{ см}^2$

2. У кулі на відстані 4 см від центра проведено переріз, площа якого дорівнює $9\pi \text{ см}^2$. Знайдіть радіус кулі.

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	5 см	6 см

3. Знайдіть площу поверхні кулі, об'єм якої дорівнює $4,5\pi \text{ см}^3$.

А	Б	В	Г	Д
9 см^2	$90\pi \text{ см}^2$	$9\pi \text{ см}^2$	90 см^2	$18\pi \text{ см}^2$

4. Знайдіть радіус сфери, яка містить усі вершини прямокутника зі сторонами 18 см і 24 см, якщо центр сфери віддалений від площини прямокутника на 8 см.

А	Б	В	Г	Д
15 см	16 см	17 см	18 см	9 см

5. Площа поверхні однієї кулі дорівнює 393 см^2 . Знайдіть площу поверхні іншої кулі, в якої радіус у $\sqrt{3}$ рази менший, ніж у даної.

А	Б	В	Г	Д
131 см^2	$131\sqrt{3} \text{ см}^2$	$\frac{393}{\sqrt{3}} \text{ см}^2$	$\frac{131}{\sqrt{3}} \text{ см}^2$	393 см^2

6. Площа сфери дорівнює 5π . Кулю перетнули площиною, довжина кола перерізу дорівнює π . Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу.

А	Б	В	Г	Д
0,5	1	0,25	0,75	$0,5\sqrt{3}$

7. Об'єми двох куль відносяться, як $27 : 64$. Як відносяться площі їхніх поверхонь?

А	Б	В	Г	Д
9 : 16	4 : 5	3 : 8	3 : 4	27 : 64

8. Знайдіть довжину лінії перетину сфери з площиною, віддаленої від центра сфери на 2 см, якщо радіус сфери, проведений в одну з точок цієї лінії, утворює з даною площиною кут 30° .

А	Б	В	Г	Д
4π см	$4\pi\sqrt{2}$ см	8π см	$4\pi\sqrt{3}$ см	16π см

9. Через кінець радіуса кулі проведено площину під кутом 45° до даного радіуса. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
6π см ²	9π см ²	12π см ²	18π см ²	36π см ²

10. Площа сфери однієї кулі у 9 разів більша за площу поверхні іншої кулі. У скільки разів об'єм першої кулі більший за об'єм другої кулі?

А	Б	В	Г	Д
у 3 рази	у 9 разів	у 18 разів	у 27 разів	у 81 раз

Рівень В

- Металеву кулю з радіусом $R = \sqrt[3]{16}$ переплавили в конус, висота якого дорівнює 8. Знайдіть відношення площі бічної поверхні конуса до площі його основи.
- Площа бічної поверхні конуса дорівнює площі поверхні кулі. Знайдіть відношення їхніх об'ємів, якщо осьовий переріз конуса є прямокутним трикутником.
- Куля дотикається до сторін правильного трикутника. Знайдіть радіус кулі, якщо сторона трикутника дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а відстань від центра кулі до площини трикутника — 3 см.
- Металеву кулю переплавили на вісім рівних між собою куль. Як змінилася при цьому загальна поверхня?
- На радіусі OA сфери із центром O позначено точки B і C так, що точка B лежить між точками O і C . Через кожну з точок B і C проведено площину, перпендикулярну до прямої OA . Кола, утворені в перерізі, мають довжини 24π см і 18π см, а відстань між цими площинами дорівнює 3 см. Знайдіть радіус сфери.
- Куля дотикається до всіх сторін ромба з діагоналями 30 см і 40 см. Знайдіть площу перерізу кулі площиною ромба.
- Два кола, з радіусами 30 і 40, лежать у паралельних площинах і на поверхні кулі, радіус якої 50. Знайдіть відстань між цими площинами та об'єм більшого кульового сектора, основою якого є одна з площин перерізу.
- Куля і циліндр мають однакові об'єми, а радіус основи циліндра дорівнює його висоті. Знайдіть відношення площі бічної поверхні циліндра та площі сфери, яка обмежує задану кулю.
- Радіуси двох куль дорівнюють 15 см і 13 см, а відстань між їхніми центрами дорівнює 14 см. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються поверхні куль.
- Радіуси трьох куль дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює сумі об'ємів трьох заданих куль.

Рівень С

1. Радіуси двох сфер дорівнюють 10 см і 17 см, а відстань між їхніми центрами дорівнює 21 см. Знайдіть довжину лінії перетину даних сфер.
2. Через точку $B(2; -3; 6)$, яка належить сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, проведено площину, перпендикулярну до осі аплікату. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі, обмеженої даною сферою.
3. У кулі проведено два паралельні перерізи, менший з яких має площу 81π см². Діаметр кулі, проведений через центри даних перерізів, ділиться ними у відношенні 2 : 7 : 1. Знайдіть об'єми найменшого кульового сегмента й кульового поясу між площинами перерізів.
4. Усі вершини рівнобедреної трапеції з бічною стороною 18 см і діагоналлю 24 см, перпендикулярною до бічної сторони, належать сфері з радіусом 25 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трапеції.
5. Відстані між центрами трьох куль, які попарно зовнішньо дотикаються, дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. Знайдіть об'єми цих куль.
6. Сума об'ємів чотирьох менших однакових куль дорівнює половині об'єму більшої кулі, а сума площ поверхонь шести менших куль на 10 см² більша за площу поверхні більшої кулі. Знайдіть радіус більшої кулі. У відповідь запишіть значення πR^2 .
7. Об'єм кулі дорівнює 288π см³. Точка лежить поза межами кулі на відстані 6 см від її поверхні. Знайдіть квадрат довжини дотичної, проведеної з цієї точки.
8. Куля дотикається до всіх сторін правильного трикутника. Знайдіть радіус кулі, якщо сторона трикутника дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а відстань від центра кулі до площини трикутника — 3 см.
9. Куля з радіусом 6 дм плаває у воді. Знайдіть висоту частини кулі, яка виступає з води, якщо густина матеріалу кулі $0,7$ г/см³.
10. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у правильний тетраедр з ребром a .

VIII. Рефлексія (1 хв)

- | | | | |
|----|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке куля і що таке сфера. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію, як утворюються тіла обертання, зокрема куля. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю формули для обчислення площі поверхні сфери. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я умію обчислювати об'єм кулі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |