

Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння та нерівності

Урок 1. Логарифм числа

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) дізнаєтесь, для чого вводять поняття логарифма;
- 2) вивчите означення логарифма;
- 3) з'ясуєте, що таке десятковий логарифм і як він позначається;
- 4) з'ясуєте, що таке натуральний логарифм і як він позначається;
- 5) вивчите основну логарифмічну тотожність;
- 6) навчитеся обчислювати числові значення логарифмів;
- 7) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть множину значень функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} - 1$.
2. Знайдіть число a , якщо графік функції $f(x) = a^x$ проходить через точку $A\left(-3; \frac{1}{27}\right)$.
3. Порівняйте x_1 і x_2 , якщо $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$.
4. До якого показника степеня потрібно піднести число 10000, щоб отримати 0,1?
- 5*. Порівняйте числа $2,5^{-\sqrt{2}}$ і 1.

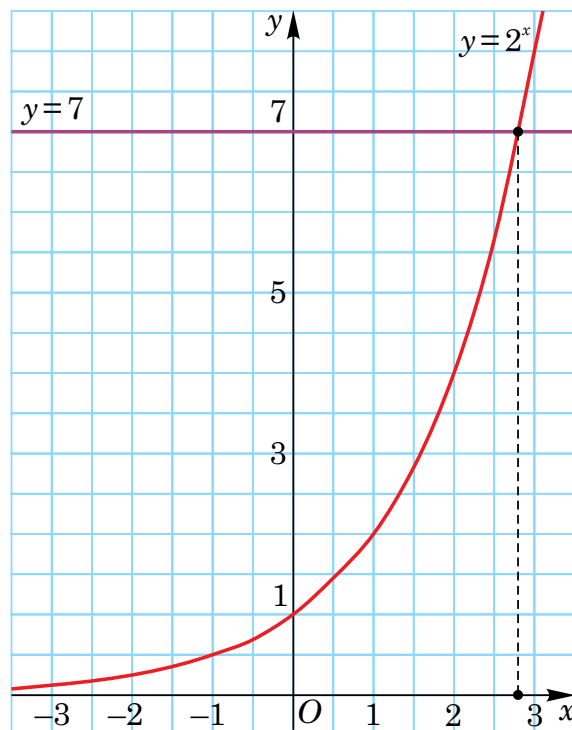
III. Рівняння виду $a^x = b$. Доцільність введення поняття логарифма

Показникове рівняння $2^x = 8$ нескладно розв'язати, проте, як розв'язати рівняння $2^x = 7$? Щоб отримати відповідь на це запитання, використаємо графічну інтерпретацію. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2^x$ та $y = 7$ (див. рисунок).

Графіки мають єдину точку перетину, проте визначити точне значення абсциси цієї точки складно.

Корінь рівняння $2^x = 7$ називають логарифмом числа 7 за основою 2 та позначають $\log_2 7$.

Таким чином, число $\log_2 7$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 7.



Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $3^x = 12$.

Розв'язання. $3^x = 12$, $3^x = 3^{\log_3 12}$, $x = \log_3 12$.

Відповідь. $\log_3 12$.

IV. Означення логарифма числа як показника степеня. Десятковий логарифм. Натуральний логарифм

Означення. Логарифмом додатного числа b за основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають **показник степеня**, до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b .

Означення. Логарифм за основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$, записують: $\lg b$.

Означення. Логарифм за основою e , $e = 2,718281828\dots$, називають **натуральним логарифмом**. Замість $\log_e b$, записують: $\ln b$.

Примітка. Число $e \approx 2,718281828 \dots$ є ірраціональним числом, що визначається як границя послідовності: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

V. Приклади обчислення логарифмів (3 хв)

1) $\log_5 125$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 5, щоб отримати число 125. Отже, $\log_5 125 = 3$, оскільки $5^3 = 125$.

2) $\log_2 1 = 0$, оскільки $1 = 2^0$.

3) $\ln \frac{1}{e} = -1$, бо $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Із означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$: $\log_a 1 = 0$ і $\log_a a = 1$.

Приклад 2. Доведіть, що $\log_5 \frac{1}{25} = -2$.

Доведення. Оскільки $5^{-2} = \frac{1}{25}$, то $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, що й треба було довести.

VI. Основна логарифмічна тотожність. Обчислення значень логарифмів. Застосування основної логарифмічної тотожності

Із означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність $a^{\log_a b} = b$. Її називають **основною логарифмічною тотожністю**.

Наприклад, $9^{\log_9 3} = 3$, $0,2^{\log_{0,2} 5} = 5$.

При обчисленні значень логарифмічних виразів використовують властивості степенів:

1) $a^{x+t} = a^x \cdot a^t$;

2) $a^{x-t} = a^x \cdot a^{-t} = \frac{a^x}{a^t}$;

3) $a^{xt} = (a^x)^t = (a^t)^x$.

Приклад 3. Обчисліть: $2^{\log_2 3 + \log_2 5}$.

Розв'язання. За властивістю степенів: $2^{\log_2 3 + \log_2 5} = 2^{\log_2 3} \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15$.

Відповідь. 15.

Історична довідка

Історія логарифмів простежується від античних часів. Передумовою застосування логарифмів став той факт, відомий ще Архімеду, що добуток степенів з однакою основою дорівнює степеню, показник якого є сумою показників степенів множників: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

Індійський математик VIII століття Вірасена, досліджуючи степеневі залежності, опублікував таблицю цілочисельних показників степенів для основ 2, 3, 4, тобто, фактично, таблицю логарифмів.

Вирішальний крок здійснено в середньовічній Європі. Потреба в складних розрахунках у XVI столітті швидко росла. Множення та ділення багатоцифрових чисел, добування коренів n -х степенів потребувало трудомістких арифметичних обчислень. Наприкінці століття декільком математикам, майже одночасно, спала на думку ідея — замінити множення чисел додаванням, зіставивши за допомогою спеціальних таблиць геометричну й арифметичну прогресії. Тоді й ділення заміниться відніманням. Спростуються також дії піднесення до степеня та обчислення коренів.

Першим цю ідею опублікував у своїй книзі «*Arithmetica integra*» (у 1544 р.) Міхель Штифель, який не доклав серйозних зусиль для практичної реалізації своєї ідеї. Головною заслугою Штифеля є перехід від цілих показників степенів до довільних раціональних показників.

У 1614 році шотландський математик-аматор Джон Непер опублікував латинською мовою твір під назвою «*Опис дивовижної таблиці логарифмів*» (лат. *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*). Він містив короткий опис логарифмів і їхніх властивостей, а також восьмицифрові таблиці логарифмів синусів, косинусів і тангенсів із кроком обчислення одна мінута. Термін «логарифм», запропонований Непером, утвердився в математиці. Теорію логарифмів Непер виклав в іншій своїй книзі «*Побудова дивовижної таблиці логарифмів*» (лат. *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*), яку видав у 1619 році його син Роберт, після смерті батька. Згідно з письмовими текстами технікою логарифмування Непер володів уже до 1594 року. Безпосередньою метою створення техніки логарифмування було спрощення складних астрологічних розрахунків. Саме тому таблиця містить лише логарифми тригонометричних функцій (інформація з Вікіпедії).



VII. Розв'язування практичних задач

Задача 1. Річна відсоткова ставка по банківському вкладу становить 16%. Вкладник має на меті визначити, за який час його вклад перевищить початковий більш ніж удвічі. За формулою складних відсотків обчисліть зазначений час.

Задача 2. Величина землетрусу R , який відбувся у Мексиці 19 вересня 1985 року, становила за шкалою Ріхтера 7,8 бала. У скільки разів інтенсивність землетрусу I перевищувала мінімальну норму інтенсивності I_0 , зумовлену підземними поштовхами, якщо $R = \lg \frac{I}{I_0}$?

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Доведіть:

1) $\log_2 8 = 3$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = 4$; 3) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} 625 = -4$.

2. Обчисліть:

1) $\log_2 2^4$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; 3) $\log_8 8^{-3}$; 4) $\log_{0,1} (0,1)^5$.

3. Обчисліть:

1) $\log_2 4$; 2) $\log_2 16$; 3) $\log_3 3$;
4) $\log_3 27$; 5) $\log_4 1$; 6) $\log_5 \frac{1}{5}$.

4. Обчисліть:

1) $\ln e^3$; 2) $\ln \frac{1}{e}$; 3) $\ln \sqrt{e}$; 4) $\ln \sqrt[4]{\frac{1}{e}}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x = 9$; 2) $12^x = 7$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4$; 4) $0,2^x = 6$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg x = 1$; 2) $\lg x = -4$; 3) $\log_{0,027} x = \frac{2}{3}$; 4) $\log_{0,25} x = \frac{3}{2}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x \geq 9$; 2) $12^x \leq 7$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 4$; 4) $(0,2)^x > 5$.

8. Обчисліть:

1) $2^{\log_2 5}$; 2) $3^{\log_3 90}$; 3) $e^{\ln 3}$; 4) $e^{2 \ln 5}$.

9. Обчисліть:

1) $2^{3+\log_2 9}$; 2) $7^{1+\log_7 4}$; 3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2+\log_{\frac{1}{6}} 20}$; 4) $(\sqrt{7})^{4+\log_{\sqrt{7}} 0,5}$.

10. Зі збільшенням діаметра об'єктива телескопа спостерігач бачить усе більше зірок, які не можна побачити простим оком. При цьому, гранична «зоряна величина» k зірок, які не можна побачити через телескоп, обчислюється за формулою $k = 7,5 + 5 \lg D$, де D — діаметр об'єктива телескопа (в сантиметрах). Обчисліть граничну «зоряну величину» для телескопа з діаметром 10 см.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\log_{\sqrt{7}} 49$; 2) $\log_{\frac{1}{15}} 225\sqrt[3]{15}$; 3) $\log_{\sqrt{2}} (2\sqrt{8})$; 4) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{64}{729}$.

2. Обчисліть:

1) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49}$; 2) $\log_6 \frac{36}{\sqrt{6}}$; 3) $\log_{0,2} \frac{25}{\sqrt{5}}$; 4) $\log_{0,1} 10\sqrt{1000}$.

3. Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$; 2) $\log_2 \sin 135^\circ$; 3) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$; 4) $\log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$.

4. Обчисліть:

1) $4 \cdot 125^{1-\log_{125} 8}$; 2) $7 \cdot 0,5^{2-\log_{0,5} 35}$; 3) $3 \cdot 4^{3-\log_4 24}$; 4) $100 \cdot 0,3^{3-\log_{0,3} 27}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$; 2) $\log_x 7 = \frac{1}{3}$; 3) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$; 4) $\log_x 8 = -\frac{1}{3}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{x^2+1} = 7$; 2) $0,1^{x^2-2} = 3$; 3) $9^{0,5x^2} = 2$; 4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}x^2+1} = 0,1$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x - 5 \cdot 2^x = -6$; 2) $9^x - 7 \cdot 3^x = -12$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x+1} \leq 14$; 2) $\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x} > 11$; 3) $5^{5x-4} \geq 10$; 4) $(\sqrt{5})^{8-9x} < 6$.

9. Обчисліть:

1) $2^{4\log_2 3-1}$; 2) $12^{\log_{144} 4 + \log_{12} 5}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$; 4) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25 - 3\lg 2}$.

10. За допомогою калькулятора обчисліть абсолютну зоряну величину Полярної зірки α Малої Ведмедиці, якщо її видима зоряна величина 2,1, а відстань до неї становить 650 світлових років. Для обчислення скористайтесь формулою $M = m + 5 - 5\lg(D)$, де M — абсолютна зоряна величина, m — видима зоряна величина, D — відстань до зірки.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\log_{2\sqrt{2}} 16$; 2) $\log_{25\sqrt[3]{5}} 125$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 81$;
4) $\log_2^2 64$; 5) $\log_{\frac{1}{3}}^{-3} 9$; 6) $\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt{5}$.

2. Обчисліть:

1) $2^{3\log_2 \sqrt{3} - 2\log_4 \sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{\frac{3}{2}}$; 2) $\log_{\sqrt{3}} \left(9\sqrt[5]{27} \cdot 2^{\log_{0,5} \sqrt[3]{3}}\right) + \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} \frac{1}{2}$.

3. Обчисліть:

1) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ$;
2) $\lg(\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) + \lg(\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ) + \lg(\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ) +$
 $+ \lg(\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ)$.

4. Обчисліть:

1) $\log_{65} \frac{2^{18} + 1}{2^{12} - 2^6 + 1}$;

2) $\log_5 \frac{3^9 - 8}{3^6 + 2 \cdot 3^3 + 4}$;

3) $\log_2 \log_5 \frac{10\sqrt{5}}{7\sqrt{5} - \sqrt{125}}$;

4) $\log_6 \log_2 \frac{2^{6,4} \cdot 2^{-0,2}}{(2^{0,1})^2}$.

5. Обчисліть:

1) $(\sqrt{2})^{\log_2 72} + 2^{\log_3 25}$; 2) $(\sqrt{5})^{\log_5 16} - 2^{\log_4 2}$; 3) $(\sqrt{3})^{\log_3 12} - 12^{\log_3 9}$; 4) $(\sqrt{7})^{\log_7 2} + 16^{\log_9 3}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $9^{x+1} + 6 = 189 \cdot 3^{x-2}$;

2) $4^{x+1} + 5 = 24 \cdot 2^{x-1}$;

3) $25^{x+1} + 3 = 100 \cdot 5^{x-1}$;

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

7. Для усіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $4^x - 2^x + a = a \cdot 2^x$;

2) $9^x - (2a + 1) \cdot 3^x + a^2 + a - 2 = 0$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $16^x \leq 6 \cdot 4^x - 5$;

2) $9 \cdot 7^x + 14 > -49^x$.

9. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2^{\log_2 x}$;

2) $y = x^{\log_x 2}$.

10. Наповнені газом лампи дають більш яскраве освітлення, ніж пустотні з металевою ниткою розжарювання з такого ж матеріалу. Це зумовлено різною температурою нитки розжарювання. За встановленим у фізиці законом, загальна кількість світла, що випромінюється при білому розжаренні, зростає пропорційно дванадцятому степеню абсолютної температури, за шкалою Кельвіна. Визначте, у скільки разів «газова» лампа, температура нитки розжарення якої 2500° абсолютної шкали, випромінює більше світла, ніж «пустотна» з ниткою, розжареною до 2200°K .

Рефлексія

1. Я розумію, навіщо введено поняття логарифма.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю означення логарифма числа.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я знаю, що таке десятковий логарифм і як він позначається.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я знаю, що таке натуральний логарифм і як він позначається.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я знаю основну логарифмічну тотожність.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 6. | Я вмію обчислювати числові значення логарифмів. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Історичний розвиток поняття логарифма.
- 2.** Логарифми в біології. Логарифмічна спіраль.
- 3.** Застосування логарифмів в акустиці.
- 4.** Шкала Ріхтера у сейсмології.
- 5.** Застосування логарифмів у фінансових розрахунках.







