

Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння та нерівності

Урок 1. Логарифм числа

План уроку

1. Рівняння виду $a^x = b$. Доцільність введення поняття логарифма.
2. Означення логарифма числа як показника степеня.
3. Десятковий логарифм.
4. Приклади обчислення логарифмів.
5. Основна логарифмічна тотожність.
6. Обчислення значень логарифмів.
7. Застосування основної логарифмічної тотожності.
8. Натуральний логарифм.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

розпізнає неповну і надлишкову інформацію, маніпулювання даними, визначає надійність джерел [12 MAO 1.2.1-2];

визначає межі даних у комплексних проблемних ситуаціях [12 MAO 1.2.3-2];

планує дії та співпрацює в групі для розв'язання комплексних проблемних ситуацій [12 MAO 2.2.3-1];

представляє результати самостійної роботи та/або у співпраці з іншими [12 MAO 2.4.1-1];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі й шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 MAO 3.2.1-1];

за потреби, виправляє помилки і вносить зміни в математичну модель та/або спосіб розв'язання [12 MAO 3.2.3-1];

визначає, аналізує й узагальнює зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу [12 MAO 4.1.1-1];

самостійно та у співпраці з іншими добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 MAO 4.2.1-2];

класифікує і структурує математичні поняття та факти [12 MAO 4.1.2-1];

досліджує та доводить математичні твердження [12 MAO 4.1.2-2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Сформулюйте практичні задачі або задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні.
- 4) Історичні відомості подавайте у межах часових можливостей. Запропонуйте учням/ученицям ознайомитися з історичними відомостями як частину домашнього завдання.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 7) Сплануйте проведення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичних задач і тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Яка відмінність між рівняннями $2^x = 32$ і $2^x = 33$?
- 2) Чи знаєте ви, що шкала вимірювання сили землетрусу (шкала Ріхтера) будується з використанням логарифма?
- 3) В економіці часто використовують складні відсотки. Яким чином можна знайти час, за який вкладена сума подвоїться?
- 4) Чи бачили ви коли-небудь логарифмічну лінійку? Чи відомо вам, що в минулому вона заміняла інженерам калькулятор?
- 5) Чи відомо вам, що людське вухо сприймає гучність звуку не прямо пропорційно, а за логарифмічною шкалою?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть множину значень функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} - 1$.

Відповідь. $(-1; 0]$.

2. Знайдіть число a , якщо графік функції $f(x) = a^x$ проходить через точку $A\left(-3; \frac{1}{27}\right)$.

Відповідь. 3.

3. Порівняйте x_1 і x_2 , якщо $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$.

Відповідь. $x_1 < x_2$.

4. До якого показника степеня потрібно піднести число 10000, щоб отримати 0,1?

Відповідь. $-0,25$.

- 5*. Порівняйте числа $2,5^{-\sqrt{2}}$ і 1.

Відповідь. $2,5^{-\sqrt{2}} < 1$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Річна відсоткова ставка по банківському вкладу становить 16%. Вкладник коштів має на меті визначити, за який час його вклад перевищить початковий більш ніж удвічі. За формулою складних відсотків обчисліть зазначений час.

Задача 2. Величина землетрусу R , який відбувся у Мексиці 19 вересня 1985 року, становила за шкалою Ріхтера 7,8 бала. У скільки разів інтенсивність землетрусу I перевищувала мінімальну норму інтенсивності I_0 , зумовлену підземними поштовхами, якщо $R = \lg \frac{I}{I_0}$?

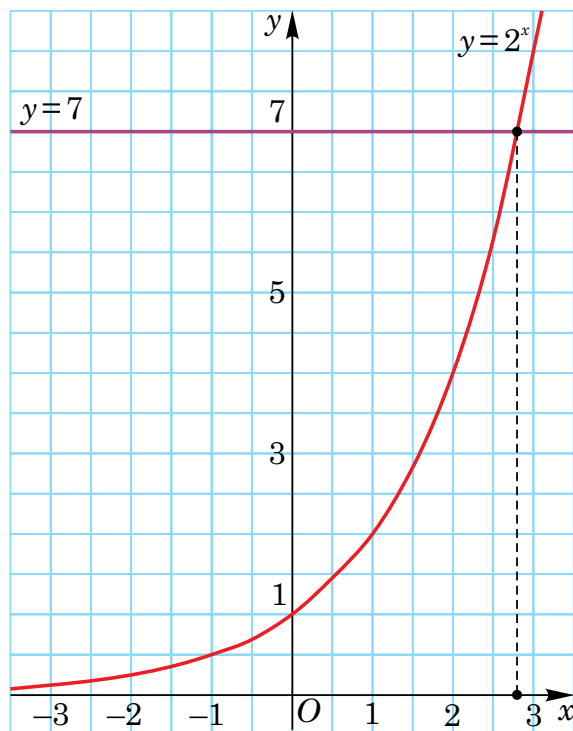
III. Рівняння виду $a^x = b$. Доцільність введення поняття логарифма (5 хв)

Показникове рівняння $2^x = 8$ нескладно розв'язати, проте, як розв'язати рівняння $2^x = 7$? Щоб отримати відповідь на це запитання, використаємо графічну інтерпретацію. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2^x$ та $y = 7$ (див. рисунок).

Графіки мають єдину точку перетину, проте визначити точне значення абсциси цієї точки складно.

Корінь рівняння $2^x = 7$ називають логарифмом числа 7 за основою 2 та позначають $\log_2 7$.

Таким чином, число $\log_2 7$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 7.



Ілюстративні приклади (2 хв)

6. Розв'яжіть рівняння $3^x = 12$.

Розв'язання. $3^x = 12$, $3^x = 3^{\log_3 12}$, $x = \log_3 12$.

Відповідь. $\log_3 12$.

7*. Розв'яжіть рівняння $0,2^{3x-5} = 4$.

Розв'язання. $0,2^{3x-5} = 4$, $3x - 5 = \log_{0,2} 4$, $3x = 5 + \log_{0,2} 4$, $x = \frac{5 + \log_{0,2} 4}{3}$.

Відповідь. $\frac{5 + \log_{0,2} 4}{3}$.

8*. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}x^2-1} = 0,7$.

Розв'язання. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}x^2-1} = 0,7$, $\frac{1}{5}x^2 - 1 = \log_{\frac{1}{3}} 0,7$, $\frac{1}{5}x^2 = 1 + \log_{\frac{1}{3}} 0,7$,

$x^2 = 5 \cdot \left(1 + \log_{\frac{1}{3}} 0,7\right)$, $x = -\sqrt{5 \left(1 + \log_{\frac{1}{3}} 0,7\right)}$ або $x = \sqrt{5 \left(1 + \log_{\frac{1}{3}} 0,7\right)}$.

Відповідь. $\pm \sqrt{5 \left(1 + \log_{\frac{1}{3}} 0,7\right)}$.

IV. Означення логарифма числа як показника степеня. Десятковий логарифм. Натуральний логарифм (2 хв)

Означення. Логарифмом додатного числа b за основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають **показник степеня**, до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b .

Означення. Логарифм за основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$, записують: $\lg b$.

Означення. Логарифм за основою e , $e = 2,718281828\dots$, називають **натуральним логарифмом**. Замість $\log_e b$, записують: $\ln b$.

Примітка. Число $e \approx 2,718281828 \dots$ є ірраціональним числом, що визначається як границя послідовності: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

V. Приклади обчислення логарифмів (3 хв)

1) $\log_5 125$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 5, щоб отримати число 125. Отже, $\log_5 125 = 3$, оскільки $5^3 = 125$.

2) $\log_2 1 = 0$, оскільки $1 = 2^0$.

$$3) \ln \frac{1}{e} = -1, \text{ бо } e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Із означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$: $\log_a 1 = 0$ і $\log_a a = 1$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

9. Доведіть, що $\log_5 \frac{1}{25} = -2$.

Доведення. Оскільки $5^{-2} = \frac{1}{25}$, то $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, що й треба було довести.

10. Обчисліть $\lg \sqrt[3]{0,01}$.

Розв'язання. Нехай $\lg \sqrt[3]{0,01} = x$, тоді $10^x = \sqrt[3]{0,01}$, $10^x = 10^{-\frac{2}{3}}$, $x = -\frac{2}{3}$.

Відповідь. $-\frac{2}{3}$.

11. Розв'яжіть рівняння $\log_x 9 = 2$.

Розв'язання. За означенням логарифма, $x > 0$ і $x^2 = 9$, звідки $x = 3$.

Відповідь. 3.

VI. Основна логарифмічна тотожність. Обчислення значень логарифмів. Застосування основної логарифмічної тотожності

Із означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність $a^{\log_a b} = b$. Її називають **основною логарифмічною тотожністю**.

Наприклад, $9^{\log_9 3} = 3$, $0,2^{\log_{0,2} 5} = 5$.

При обчисленні значень логарифмічних виразів використовують властивості степенів:

$$1) a^{x+t} = a^x \cdot a^t;$$

$$2) a^{x-t} = a^x \cdot a^{-t} = \frac{a^x}{a^t};$$

$$3) a^{xt} = (a^x)^t = (a^t)^x.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

12. Обчисліть: $2^{\log_2 3 + \log_2 5}$.

Розв'язання. За властивістю степенів: $2^{\log_2 3 + \log_2 5} = 2^{\log_2 3} \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15$.

Відповідь. 15.

13. Обчисліть: $7^{2 \log_7 3}$.

Розв'язання. За властивістю степенів: $7^{2 \log_7 3} = (7^{\log_7 3})^2 = 3^2 = 9$.

Відповідь. 9.

14. Обчисліть: $e^{-2\ln 3}$.

Розв'язання. За властивістю степенів: $e^{-2\ln 3} = (e^{\ln 3})^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Відповідь. $\frac{1}{9}$.

15. Обчисліть: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_1 6-3}$.

Розв'язання. За властивістю степенів:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_1 6-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_1 6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 6 \cdot 8 = 48.$$

Відповідь. 48.

16. Обчисліть: $5^{\log_5 4 \cdot \log_2 3}$.

Розв'язання. За властивістю степенів:

$$5^{\log_5 4 \cdot \log_2 3} = \left(5^{\log_5 4}\right)^{\log_2 3} = 4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9.$$

Відповідь. 9.

17. Обчисліть: $\log_{36} 216$.

Розв'язання. Нехай $\log_{36} 216 = x$, тоді $36^x = 216$, $6^{2x} = 6^3$, $2x = 3$, $x = 1,5$.

Відповідь. 1,5.

Історична довідка

Історія логарифмів простежується від античних часів. Передумовою застосування логарифмів став той факт, відомий ще Архімеду, що добуток степенів з однакою основою дорівнює степеню, показник якого є сумою показників степенів множників: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

Індійський математик VIII століття Вірасена, досліджуючи степеневі залежності, опублікував таблицю цілочисельних показників степенів для основ 2, 3, 4, тобто, фактично, таблицю логарифмів.

Вирішальний крок здійснено в середньовічній Європі. Потреба в складних розрахунках у XVI столітті швидко росла. Множення та ділення багатоцифрових чисел, добування коренів n -х степенів потребувало трудомістких арифметичних обчислень. Наприкінці століття декільком математикам, майже одночасно, спала на думку ідея — замінити множення чисел додаванням, зіставивши за допомогою спеціальних таблиць геометричну й арифметичну прогресії. Тоді й ділення заміниться відніманням. Спрощуються також дії піднесення до степеня та обчислення коренів.

Першим цю ідею опублікував у своїй книзі «*Arithmetica integra*» (у 1544 р.) Міхаель Штифель, який не доклав серйозних зусиль для практичної реалізації своєї ідеї. Головною заслугою Штифеля є перехід від цілих показників степенів до довільних раціональних показників.

У 1614 році шотландський математик-аматор Джон Непер опублікував латинською мовою твір під назвою «*Опис дивовижної таблиці логарифмів*» (лат. *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*). Він містив короткий опис логарифмів і їхніх властивостей, а також восьмицифрові таблиці логарифмів синусів, косинусів і тангенсів із кроком обчислення одна мінута. Термін «логарифм», запропонований Непером, утвердився в математиці. Теорію логарифмів Непер виклав в іншій своїй книзі «*Побудова*

дивовижної таблиці логарифмів» (лат. *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*), яку видав у 1619 році його син Роберт, після смерті батька. Згідно з письмовими текстами технікою логарифмування Непер володів уже до 1594 року. Безпосередньою метою створення техніки логарифмування було спрощення складних астрологічних розрахунків. Саме тому таблиця містить лише логарифми тригонометричних функцій (інформація з Вікіпедії).



VII. Розв'язування практичних задач. Групова активність (7–10 хв)

Задача 1. Річна відсоткова ставка по банківському вкладу становить 16%. Вкладник має на меті визначити, за який час його вклад перевищить початковий більш ніж удвічі. За формулою складних відсотків обчисліть зазначений час.

Розв'язання. Формула складних відсотків: $A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, де A_n — кошти після певного періоду n , A_0 — початковий вклад, p — відсоткова ставка.

За умовою, $\frac{A_n}{A_0} = 2$, $p = 16$.

Тоді: $2 = (1 + 0,16)^n$, $1,16^n = 2$, $n = \log_{1,16} 2$, $n \approx 4,67$.

Відповідь. Через 5 років.

Задача 2. Величина землетрусу R , який відбувся у Мексиці 19 вересня 1985 року, становила за шкалою Ріхтера 7,8 бала. У скільки разів інтенсивність землетрусу I перевищувала мінімальну норму інтенсивності I_0 , зумовлену підземними поштовхами, якщо $R = \lg \frac{I}{I_0}$?

Розв'язання. Нехай $I = kI_0$, де k — коефіцієнт збільшення інтенсивності. Величина землетрусу визначається рівнянням $R = \lg k$, звідки $k = 10^R$. За умовою, $R = 7,8$, отже $k = 10^{7,8} \approx 63095734$ (рази).
Відповідь. У 63 095 734 рази.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5-10 хв)

Рівень А

1. Доведіть:

$$1) \log_2 8 = 3; \quad 2) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4; \quad 3) \log_3 \frac{1}{9} = -2; \quad 4) \log_{\frac{1}{5}} 625 = -4.$$

2. Обчисліть:

$$1) \log_2 2^4; \quad 2) \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-7}; \quad 3) \log_8 8^{-3}; \quad 4) \log_{0,1} (0,1)^5.$$

3. Обчисліть:

$$\begin{array}{lll} 1) \log_2 4; & 2) \log_2 16; & 3) \log_3 3; \\ 4) \log_3 27; & 5) \log_4 1; & 6) \log_5 \frac{1}{5}. \end{array}$$

4. Обчисліть:

$$1) \ln e^3; \quad 2) \ln \frac{1}{e}; \quad 3) \ln \sqrt{e}; \quad 4) \ln \sqrt[4]{\frac{1}{e}}.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2^x = 9; \quad 2) 12^x = 7; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\right)^x = 4; \quad 4) 0,2^x = 6.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \lg x = 1; \quad 2) \lg x = -4; \quad 3) \log_{0,027} x = \frac{2}{3}; \quad 4) \log_{0,25} x = \frac{3}{2}.$$

7. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2^x \geq 9; \quad 2) 12^x \leq 7; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\right)^x < 4; \quad 4) (0,2)^x > 5.$$

8. Обчисліть:

$$1) 2^{\log_2 5}; \quad 2) 3^{\log_3 90}; \quad 3) e^{\ln 3}; \quad 4) e^{2 \ln 5}.$$

9. Обчисліть:

$$1) 2^{3+\log_2 9}; \quad 2) 7^{1+\log_7 4}; \quad 3) \left(\frac{1}{6}\right)^{2+\log_{\frac{1}{6}} 20}; \quad 4) (\sqrt{7})^{4+\log_{\sqrt{7}} 0,5}.$$

10. Зі збільшенням діаметра об'єктива телескопа спостерігач бачить усе більше зірок, які не можна побачити простим оком. При цьому, гранична «зоряна величина» k зірок, які не можна побачити через телескоп, обчислюється за формулою $k = 7,5 + 5 \lg D$, де D — діаметр об'єктива телескопа (в сантиметрах). Обчисліть граничну «зоряну величину» для телескопа з діаметром 10 см.

Рівень В

1. Обчисліть:

$$1) \log_{\sqrt{7}} 49; \quad 2) \log_{\frac{1}{15}} 225\sqrt[3]{15}; \quad 3) \log_{\sqrt{2}} (2\sqrt{8}); \quad 4) \log_{\frac{3}{2}} \frac{64}{729}.$$

2. Обчисліть:

$$1) \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49}; \quad 2) \log_6 \frac{36}{\sqrt{6}}; \quad 3) \log_{0,2} \frac{25}{\sqrt{5}}; \quad 4) \log_{0,1} 10\sqrt{1000}.$$

3. Обчисліть значення виразу:

$$1) \log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}; \quad 2) \log_2 \sin 135^\circ; \quad 3) \log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343; \quad 4) \log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}.$$

4. Обчисліть:

$$1) 4 \cdot 125^{1-\log_{125} 8}; \quad 2) 7 \cdot 0,5^{2-\log_{0,5} 35}; \quad 3) 3 \cdot 4^{3-\log_4 24}; \quad 4) 100 \cdot 0,3^{3-\log_{0,3} 27}.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \log_x 3 = \frac{1}{2}; \quad 2) \log_x 7 = \frac{1}{3}; \quad 3) \log_x 4 = -\frac{1}{2}; \quad 4) \log_x 8 = -\frac{1}{3}.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2^{x^2+1} = 7; \quad 2) 0,1^{x^2-2} = 3; \quad 3) 9^{0,5x^2} = 2; \quad 4) \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}x^2+1} = 0,1.$$

7. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4^x - 5 \cdot 2^x = -6; \quad 2) 9^x - 7 \cdot 3^x = -12.$$

8. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^{x+1} \leq 14; \quad 2) \left(\frac{2}{7}\right)^{3-x} > 11; \quad 3) 5^{5x-4} \geq 10; \quad 4) (\sqrt{5})^{8-9x} < 6.$$

9. Обчисліть:

$$1) 2^{4\log_2 3-1}; \quad 2) 12^{\log_{144} 4 + \log_{12} 5}; \quad 3) \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}; \quad 4) 1000^{\frac{1}{2}\lg 25 - 3\lg 2}.$$

10. За допомогою калькулятора обчисліть абсолютну зоряну величину Полярної зірки α Малої Ведмедиці, якщо її видима зоряна величина 2,1, а відстань до неї становить 650 світлових років. Для обчислення скористайтесь формулою $M = m + 5 - 5 \lg(D)$, де M — абсолютна зоряна величина, m — видима зоряна величина, D — відстань до зірки.

Рівень С

1. Обчисліть:

$$1) \log_{2\sqrt{2}} 16; \quad 2) \log_{25\sqrt[3]{5}} 125; \quad 3) \log_{\frac{1}{3}} 81; \\ 4) \log_2^2 64; \quad 5) \log_{\frac{1}{3}}^{-3} 9; \quad 6) \log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt{5}.$$

2. Обчисліть:

$$1) 2^{3\log_2 \sqrt{3} - 2\log_4 \sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{-\frac{3}{2}}; \quad 2) \log_{\sqrt{3}} \left(9\sqrt[5]{27} \cdot 2^{\log_{0,5} \sqrt[3]{3}}\right) + \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} \frac{1}{2}.$$

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 4. | Я знаю, що таке натуральний логарифм і як він позначається. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю основну логарифмічну тотожність. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я вмію обчислювати числові значення логарифмів. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми учнівських проєктів

- 1.** Історичний розвиток поняття логарифма.
- 2.** Логарифми в біології. Логарифмічна спіраль.
- 3.** Застосування логарифмів в акустиці.
- 4.** Шкала Ріхтера у сейсмології.
- 5.** Застосування логарифмів у фінансових розрахунках.