

Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння та нерівності

Урок 9. Логарифмічні нерівності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите означення логарифмічної нерівності;
- 2) класифікуєте логарифмічні нерівності та методи їхнього розв'язання;
- 3) навчитеся розв'язувати логарифмічні нерівності графічним методом;
- 4) навчитеся розв'язувати логарифмічні нерівності алгебричними методами;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Порівняйте з одиницею число $\log_7 0,5 + \log_7 13$.
2. Обчисліть: $\log_{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4}$.
3. Знайдіть область визначення функції $y = \lg(x^2 + x - 56)$.
4. Обчисліть: $\frac{\lg 343}{\lg 7}$.
5. Визначте знак числа $\lg 3 - \frac{1}{3}$.

III. Означення та види логарифмічних нерівностей

Означення. *Логарифмічною* називається нерівність, у якій невідомі містяться під знаками логарифмів.

При розв'язанні логарифмічних нерівностей, використовують властивості нерівностей, знаходять допустимі значення змінної, застосовують властивості логарифмів та монотонність логарифмічної функції.

Основні види логарифмічних нерівностей ($a > 0, a \neq 1$)

Вид нерівності	Рівносильне перетворення
$\log_a f(x) > b, a > 1$	$f(x) > a^b$
$\log_a f(x) > b, 0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$
$\log_a f(x) < b, a > 1$	$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$
$\log_a f(x) < b, 0 < a < 1$	$f(x) > a^b$
$\log_a f(x) > \log_a g(x), a > 1$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x), 0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Логарифмічні нерівності зводяться до найпростіших рівносильними перетвореннями з використанням методів, аналогічних до методів розв'язування відповідних рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 6) > 2$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то дана нерівність рівносильна системі:
$$\begin{cases} 2x - 6 < \frac{1}{4}, \\ 2x - 6 > 0. \end{cases}$$

Звідки $\begin{cases} x < 3\frac{1}{8}, \\ x > 3; \end{cases} x \in \left(3; 3\frac{1}{8}\right)$.

Відповідь. $\left(3; 3\frac{1}{8}\right)$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\lg(2x - 4) < \lg(x + 1)$.

Розв'язання. Оскільки $10 > 1$, то дана нерівність рівносильна системі:
$$\begin{cases} 2x - 4 < x + 1, \\ 2x - 4 > 0. \end{cases}$$

Звідки $\begin{cases} x < 5, \\ x > 2; \end{cases} x \in (2; 5)$.

Відповідь. $(2; 5)$.

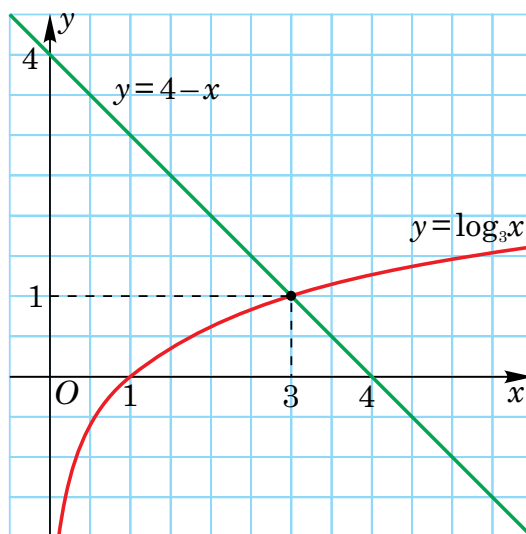
IV. Графічний метод розв'язання логарифмічних нерівностей

Графічний метод розв'язання логарифмічних нерівностей, як і будь-яких інших нерівностей, передбачає побудову графіків функцій, що містяться у лівій та в правій частинах даної нерівності, і визначення проміжків, на яких графік однієї функції розташований «вище» або «нижче» за інший, відповідно до знака нерівності.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $\log_3 x > 4 - x$ графічним методом.

Розв'язання.

Побудуємо графіки функцій $y = \log_3 x$ і $y = 4 - x$ в одній системі координат (див. рисунок).



Графіки перетинаються в точці з абсцисою $x = 3$.

Графік функції $y = \log_3 x$ розташований вище за графік функції $y = 4 - x$ на проміжку $x \in (3; +\infty)$.

Відповідь. $(3; +\infty)$.

V. Алгебричні методи розв'язання логарифмічних нерівностей

Для розв'язування логарифмічних нерівностей алгебричними методами можна використовувати ті самі прийоми, що й для розв'язування логарифмічних рівнянь. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) \leq 1$.

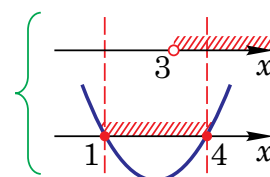
Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x - 2 > 0, \\ \log_2(x - 3)(x - 2) \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ (x - 3)(x - 2) \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язки системи побудуємо на числових осях (див. рисунок).

Отже, $x \in (3; 4]$.

Відповідь. $(3; 4]$.



Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

Розв'язання. Враховуючи, що $x > 0$, виконуємо заміну $\log_{0,2} x = t$, тоді $t^2 - 5t + 6 < 0$.

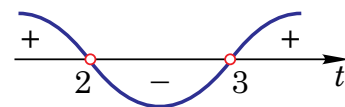
Позначимо розв'язки нерівності на числовій осі (див. рисунок).

Отже, $t \in (2; 3)$.

Повернемося до заміни:

$$\begin{cases} \log_{0,2} x > 2, \\ \log_{0,2} x < 3; \end{cases} \begin{cases} x < \frac{1}{25}, \\ x > \frac{1}{125}; \end{cases} x \in \left(\frac{1}{125}; \frac{1}{25} \right).$$

Відповідь. $\left(\frac{1}{125}; \frac{1}{25} \right)$.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Визначте, скільки одиниць певних виробів буде виготовлено, якщо повна вартість виробів перевищуватиме 1600 грн. При цьому повна вартість $C(n)$ вироблених на підприємстві виробів виражається залежністю: $C(n) = 500 + 100 \cdot \log_2(n + 10)$, де n — кількість виробів.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_2 x \geq 4; \quad 2) \log_2 x < \frac{1}{2}; \quad 3) \log_{\frac{1}{2}} x > -3; \quad 4) \log_{0,1} x \leq -\frac{1}{2}.$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_5(3x + 1) < 2; \quad 2) \log_{\frac{2}{3}} \frac{x}{5} > 1; \quad 3) \log_{0,5} \frac{x}{3} \geq -2; \quad 4) \log_{\sqrt{3}}(2x - 3) < 4.$$

3. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_5 x > \log_5(3x - 4); \quad 2) \log_{\frac{1}{3}}(5x - 9) \geq \log_{\frac{1}{3}} 4x; \\ 3) \log_{0,6}(2x - 1) < \log_{0,6} x; \quad 4) \log_3(8 - 6x) \leq \log_3 2x.$$

4. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_2(5x - 9) \leq \log_2(3x + 1); \quad 2) \log_{0,4}(12x + 2) \geq \log_{0,4}(10x + 16); \\ 3) \log_{\frac{2}{3}}(-x) > \log_{\frac{2}{3}}(4 - 2x); \quad 4) \log_{2,5}(6 - x) < \log_{2,5}(4 - 3x).$$

5. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}}(4 - x) > -1; \quad 2) \log_2(7 - x) + \log_2 x \geq 1 + \log_2 3; \\ 3) \lg(7 - x) + \lg x > 1; \quad 4) \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(10 - x) \geq -1 + \log_{\frac{1}{2}} 4,5.$$

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2^2 x > 4 \log_2 x - 3$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x < -2$;

2) $\log_4^2 x - \log_4 x \leq 2$;

4) $\log_{0,2}^2 x \geq 6 - \log_{0,2} x$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{15}(x-3) + \log_{15}(x-5) < 1$;

3) $\lg(3x-4) < \lg(2x+1)$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-x) \geq -2$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} < 1$;

2) $\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1 - \lg x} < 1$.

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_3 x > \log_3 72 - \log_3 8$;

3) $\log_5 x - \log_5 35 \leq \log_5 \frac{1}{7}$;

2) $3 \log_{\frac{1}{7}} x < \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$;

4) $4 \log_{0,6} x \geq \log_{0,6} 8 + \log_{0,6} 2$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\sqrt{2}-1}(7x-21) \leq \log_{\sqrt{2}-1}(21-3x)$;

3) $\log_{\pi}(5x-15) \geq \log_{\pi}(15-3x)$;

2) $\log_{\sqrt{2}+1}(2x+7) > \log_{\sqrt{2}+1}(19-6x)$;

4) $\log_{2-\sqrt{3}}(4x+17) < \log_{2-\sqrt{3}}(25-5x)$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_3(x^2+6) < \log_3 5x$;

3) $\lg(x^2-8) \leq \lg(2-9x)$;

2) $\log_{0,6}(6x-x^2) > \log_{0,6}(-8-x)$;

4) $\log_{\sqrt{2}}(x^2+10x) \geq \log_{\sqrt{2}}(x-14)$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_5(26-3^x) > 2$;

3) $\log_{\frac{1}{4}}(19-3^x) < -2$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3+5^x) \leq -3$.

4) $\log_2(9-2^x) > 3$.

5. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\log_2(x-1)}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{\log_5(x+3)}}$; 4) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2 \frac{4-x}{x-2} \leq \log_2 \frac{1}{x-2}$;

2) $\log_{0,5} \frac{7}{3x-2} > \log_{0,5} \frac{4x}{3x-2}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg(x+3) + \lg(2x-8) < 2 \lg x$;

2) $\log_{0,5}(3x-1) - \log_{0,5}(x-1) < \log_{0,5}(x+18) - \log_{0,5}(x+2)$;

3) $\log_3(2x-7) \geq 2 \log_3(x+1) - \log_3(x-19)$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+3) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} x^2 + \log_{\frac{1}{3}}(4x-9)$.

8. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $2\log_{0,3}^2(x+1) - 7\log_{0,3}(x+1) - 4 \leq 0$; 2) $3\log_4^2 x - 7\log_4 16x + 30 < 0$;
3) $3\log_{\frac{1}{3}}^2(2x+1) + 5\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) - 2 > 0$; 4) $\log_3^2 x + 3\log_3 9x - 24 < 0$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\log_2(x^2 - 5x + 4) < 2$; 2) $\log_3(x^2 - 4x + 3) < 1$;
3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 10x + 9) > -2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(2x^2 - 6x + 4) > -1$.

2. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\log_2(\log_3 x) > 1$; 2) $\log_2(\log_4 x) > -1$; 3) $\log_2(\log_3 x) < 2$; 4) $\log_3(\log_2 x) < 1$.

3. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{1}{3}\log_2(x+1)^3 < -\log_2 3$; 2) $2\log_{0,5}\sqrt{x+1} < -\log_{0,5} 5$;
3) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq 0$; 4) $\log_{\frac{2}{5}} \log_3(x+2) > 0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\lg x^{16} - \lg x^8 + 1 \leq 0$; 2) $\log_2 x^{12} + \log_2 x^4 - 4 > 0$.

5. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x-2) < \log_2(x^3 - x^2 + 4x - 3)$;
2) $\lg(x^3 - x^2 - x + 20) \geq \lg(x+2) + \lg(x^2 - 2x + 4)$.

6. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\log_2^2 x + 3\log_2 x \leq 2,5 \cdot \log_{4\sqrt{2}} 16$; 2) $\log_2^2 x + 3\log_2 x \leq 5 \cdot \log_2 \sqrt[5]{16}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\log_{x+2}(5-x) < 1$; 2) $\log_{2x-3} x \geq 1$; 3) $\log_{x-1} 9 \leq 1$; 4) $\log_{x-9} 2 > \log_{\sqrt{x-9}} 2$.

8. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_4(x-1)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_5 \log_{\frac{1}{3}}(2-x)$.

Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

.....
.....
.....
.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....
.....
.....
.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

.....

.....

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Дослідження логарифмічних нерівностей із параметрами.
- 2.** Логарифмічні нерівності в прикладних задачах.
- 3.** Комп'ютерне моделювання розв'язків логарифмічних нерівностей.
- 4.** Логарифмічні нерівності, що зводяться до квадратичних чи дробово-раціональних нерівностей.
- 5.** Програмування алгоритмів розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей.







