

Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння та нерівності

Урок 9. Логарифмічні нерівності

План уроку

1. Означення та види логарифмічних нерівностей.
2. Графічний метод розв'язання логарифмічних нерівностей.
3. Алгебричні методи розв'язання логарифмічних нерівностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує комплексну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1-1];

упорядковує інформацію математичного змісту [12 МАО 2.1.3-1];

самостійно або у співпраці з іншими обирає математичну модель розв'язання проблемної ситуації з урахуванням різних умов, зокрема бажаної точності результату і ресурсів, необхідних для застосування цієї моделі, на засадах ощадливості та поміркованості [12 МАО 3.2.2-1];

класифікує і структурує математичні поняття та факти [12 МАО 4.1.2-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи впливає основа логарифма на розв'язання логарифмічних нерівностей?

2) У яких задачах економіки або біології можна застосовувати найпростіші логарифмічні нерівності?

3) Чи відрізняються методи розв'язування логарифмічних рівнянь та логарифмічних нерівностей? У чому їхні спільні риси, і в чому — відмінність?

4) Чи завжди можна розв'язати логарифмічну нерівність аналітично? Коли доцільно використати графічний метод?

5) Чи можна використовувати властивості логарифмів при розв'язуванні логарифмічних нерівностей?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Порівняйте з одиницею число $\log_7 0,5 + \log_7 13$.

Відповідь. $\log_7 0,5 + \log_7 13 < 1$.

2. Обчисліть: $\log_{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4}$.

Відповідь. -1 .

3. Знайдіть область визначення функції $y = \lg(x^2 + x - 56)$.

Відповідь. $(-\infty; -8) \cup (7; +\infty)$.

4. Обчисліть: $\frac{\lg 343}{\lg 7}$.

Відповідь. 3.

5. Визначте знак числа $\lg 3 - \frac{1}{3}$.

Відповідь. $\lg 3 - \frac{1}{3} > 0$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Визначте, скільки одиниць певних виробів буде виготовлено, якщо повна вартість виробів перевищуватиме 1600 грн. При цьому повна вартість $C(n)$ вироблених на підприємстві виробів виражається залежністю: $C(n) = 500 + 100 \cdot \log_2(n + 10)$, де n — кількість виробів.

III. Означення та види логарифмічних нерівностей (3 хв)

Означення. *Логарифмічною* називається нерівність, у якій невідомі містяться під знаками логарифмів.

При розв'язанні логарифмічних нерівностей, використовують властивості нерівностей, знаходять допустимі значення змінної, застосовують властивості логарифмів та монотонність логарифмічної функції.

Основні види логарифмічних нерівностей ($a > 0, a \neq 1$)

Вид нерівності	Рівносильне перетворення
$\log_a f(x) > b, a > 1$	$f(x) > a^b$
$\log_a f(x) > b, 0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$
$\log_a f(x) < b, a > 1$	$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$
$\log_a f(x) < b, 0 < a < 1$	$f(x) > a^b$
$\log_a f(x) > \log_a g(x), a > 1$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x), 0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Логарифмічні нерівності зводяться до найпростіших рівносильними перетвореннями з використанням методів, аналогічних до методів розв'язування відповідних рівнянь.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 6) > 2$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то дана нерівність рівносильна системі:
$$\begin{cases} 2x - 6 < \frac{1}{4}, \\ 2x - 6 > 0. \end{cases}$$

Звідки $\begin{cases} x < 3\frac{1}{8}, \\ x > 3; \end{cases} x \in \left(3; 3\frac{1}{8}\right)$.

Відповідь. $\left(3; 3\frac{1}{8}\right)$.

7. Розв'яжіть нерівність $\log_{\sqrt{2}-1}(3x - 4) < \log_{\sqrt{2}-1}(x - 2)$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, то дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} 3x - 4 > x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Звідки: $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases} x > 2$.

Відповідь. $(2; +\infty)$.

8. Розв'яжіть нерівність $\lg(2x - 4) < \lg(x + 1)$.

Розв'язання. Оскільки $10 > 1$, то дана нерівність рівносильна системі:
$$\begin{cases} 2x - 4 < x + 1, \\ 2x - 4 > 0. \end{cases}$$

Звідки $\begin{cases} x < 5, \\ x > 2; \end{cases} x \in (2; 5)$.

Відповідь. $(2; 5)$.

IV. Графічний метод розв'язання логарифмічних нерівностей (2 хв)

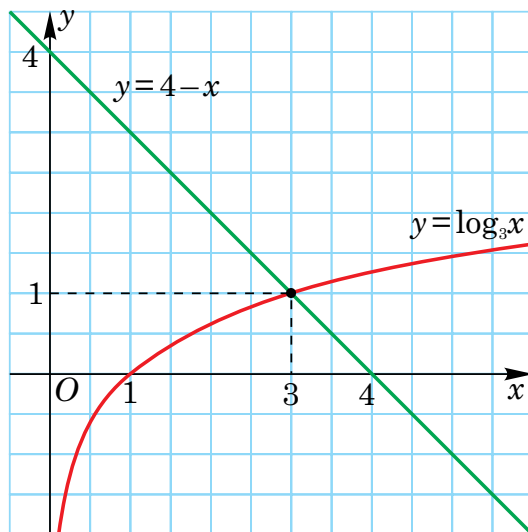
Графічний метод розв'язання логарифмічних нерівностей, як і будь-яких інших нерівностей, передбачає побудову графіків функцій, що містяться у лівій та в правій частинах даної нерівності, і визначення проміжків, на яких графік однієї функції розташований «вище» або «нижче» за інший, відповідно до знака нерівності.

Ілюстративні приклади (5 хв)

9. Розв'яжіть нерівність $\log_3 x > 4 - x$ графічним методом.

Розв'язання.

Побудуємо графіки функцій $y = \log_3 x$ і $y = 4 - x$ в одній системі координат (див. рисунок).



Графіки перетинаються в точці з абсцисою $x = 3$.

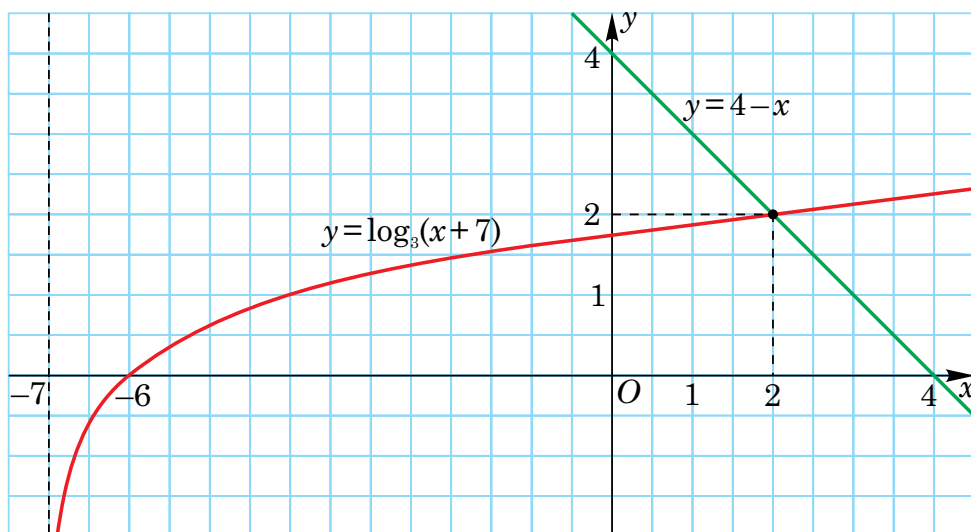
Графік функції $y = \log_3 x$ розташований вище за графік функції $y = 4 - x$ на проміжку $x \in (3; +\infty)$.

Відповідь. $(3; +\infty)$.

- 10.** Розв'яжіть нерівність $\log_3(x + 7) < 4 - x$ графічним методом.

Розв'язання.

Побудуємо графіки функцій $y = \log_3(x + 7)$ і $y = 4 - x$ в одній системі координат (див. рисунок).



Графіки перетинаються в точці з абсцисою $x = 2$.

Графік функції $y = \log_3(x + 7)$ розташований нижче від графіка функції $y = 4 - x$ на проміжку $x \in (-7; 2)$.

Відповідь. $(-7; 2)$.

V. Алгебричні методи розв'язання логарифмічних нерівностей

Для розв'язування логарифмічних нерівностей алгебричними методами можна використовувати ті самі прийоми, що й для розв'язування логарифмічних рівнянь. Розглянемо декілька прикладів.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 11.** Розв'яжіть нерівність $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1$.

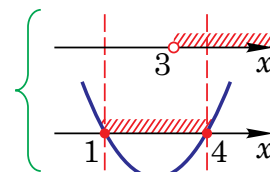
Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x-3 > 0, \\ x-2 > 0, \\ \log_2(x-3)(x-2) \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ (x-3)(x-2) \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язки системи побудуємо на числових осях (див. рисунок).

Отже, $x \in (3; 4]$.

Відповідь. $(3; 4]$.



- 12.** Розв'яжіть нерівність $\log_{0.2}^2 x - 5\log_{0.2} x < -6$.

Розв'язання. Враховуючи, що $x > 0$, виконуємо заміну $\log_{0.2} x = t$, тоді $t^2 - 5t + 6 < 0$.

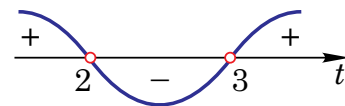
Позначимо розв'язки нерівності на числовій осі (див. рисунок).

Отже, $t \in (2; 3)$.

Повернемось до заміни:

$$\begin{cases} \log_{0.2} x > 2, \\ \log_{0.2} x < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{25}, \\ x > \frac{1}{125}; \end{cases} \quad x \in \left(\frac{1}{125}; \frac{1}{25} \right).$$

Відповідь. $\left(\frac{1}{125}; \frac{1}{25} \right)$.



- 13.** Розв'яжіть нерівність $\log_x 3 - \frac{5}{2} - \log_{\frac{1}{3}} x > 0$.

Розв'язання. Враховуючи, що $x > 0$ і $x \neq 1$, маємо $\frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} + \log_3 x > 0$.

Нехай $\log_3 x = t$, тоді $\frac{1}{t} - \frac{5}{2} + t > 0$, $\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0$, $\frac{(2t-1)(t-2)}{2t} > 0$.

Застосуємо метод інтервалів (див. рисунок).

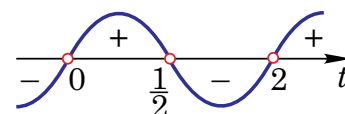
Отже, $t \in \left(0; \frac{1}{2} \right) \cup (2; +\infty)$.

Повернемось до заміни:

$$\begin{cases} 0 < \log_3 x < \frac{1}{2}, \\ \log_3 x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9. \end{cases}$$

Отже, $x \in (1; \sqrt{3}) \cup (9; +\infty)$.

Відповідь. $(1; \sqrt{3}) \cup (9; +\infty)$.



VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Визначте, скільки одиниць певних виробів буде виготовлено, якщо повна вартість виробів перевищуватиме 1600 грн. При цьому повна вартість $C(n)$ вироблених на підприємстві виробів виражається залежністю: $C(n) = 500 + 100 \cdot \log_2(n + 10)$, де n — кількість виробів.

Розв'язання. Математичною моделлю даної задачі є нерівність $500 + 100 \cdot \log_2(n + 10) > 1600$, $100 \cdot \log_2(n + 10) > 1100$, $\log_2(n + 10) > 11$, $n + 10 > 2048$, $n > 2038$.

Отже, кількість виготовлених виробів більша за 2038 одиниць.

Відповідь. Більша за 2038 одиниць.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2 x \geq 4$; 2) $\log_2 x < \frac{1}{2}$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x > -3$; 4) $\log_{0,1} x \leq -\frac{1}{2}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_5(3x + 1) < 2$; 2) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{x}{5} > 1$; 3) $\log_{0,5} \frac{x}{3} \geq -2$; 4) $\log_{\sqrt{3}}(2x - 3) < 4$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_5 x > \log_5(3x - 4)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(5x - 9) \geq \log_{\frac{1}{3}} 4x$;
3) $\log_{0,6}(2x - 1) < \log_{0,6} x$; 4) $\log_3(8 - 6x) \leq \log_3 2x$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(5x - 9) \leq \log_2(3x + 1)$; 2) $\log_{0,4}(12x + 2) \geq \log_{0,4}(10x + 16)$;
3) $\log_{\frac{2}{3}}(-x) > \log_{\frac{2}{3}}(4 - 2x)$; 4) $\log_{2,5}(6 - x) < \log_{2,5}(4 - 3x)$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}}(4 - x) > -1$; 2) $\log_2(7 - x) + \log_2 x \geq 1 + \log_2 3$;
3) $\lg(7 - x) + \lg x > 1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(10 - x) \geq -1 + \log_{\frac{1}{2}} 4,5$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2^2 x > 4 \log_2 x - 3$; 2) $\log_4^2 x - \log_4 x \leq 2$;
3) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x < -2$; 4) $\log_{0,2}^2 x \geq 6 - \log_{0,2} x$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{15}(x - 3) + \log_{15}(x - 5) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + \log_{\frac{1}{3}}(12 - x) \geq -2$;
3) $\lg(3x - 4) < \lg(2x + 1)$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 3) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} < 1$;

2) $\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1 - \lg x} < 1$.

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_3 x > \log_3 72 - \log_3 8$;

2) $3 \log_{\frac{1}{7}} x < \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$;

3) $\log_5 x - \log_5 35 \leq \log_5 \frac{1}{7}$;

4) $4 \log_{0,6} x \geq \log_{0,6} 8 + \log_{0,6} 2$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\sqrt{2}-1}(7x-21) \leq \log_{\sqrt{2}-1}(21-3x)$;

2) $\log_{\sqrt{2}+1}(2x+7) > \log_{\sqrt{2}+1}(19-6x)$;

3) $\log_{\pi}(5x-15) \geq \log_{\pi}(15-3x)$;

4) $\log_{2-\sqrt{3}}(4x+17) < \log_{2-\sqrt{3}}(25-5x)$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_3(x^2+6) < \log_3 5x$;

2) $\log_{0,6}(6x-x^2) > \log_{0,6}(-8-x)$;

3) $\lg(x^2-8) \leq \lg(2-9x)$;

4) $\log_{\sqrt{2}}(x^2+10x) \geq \log_{\sqrt{2}}(x-14)$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_5(26-3^x) > 2$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3+5^x) \leq -3$.

3) $\log_{\frac{1}{4}}(19-3^x) < -2$;

4) $\log_2(9-2^x) > 3$.

5. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\log_2(x-1)}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{\log_5(x+3)}}$; 4) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2 \frac{4-x}{x-2} \leq \log_2 \frac{1}{x-2}$;

2) $\log_{0,5} \frac{7}{3x-2} > \log_{0,5} \frac{4x}{3x-2}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg(x+3) + \lg(2x-8) < 2 \lg x$;

2) $\log_{0,5}(3x-1) - \log_{0,5}(x-1) < \log_{0,5}(x+18) - \log_{0,5}(x+2)$;

3) $\log_3(2x-7) \geq 2 \log_3(x+1) - \log_3(x-19)$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+3) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} x^2 + \log_{\frac{1}{3}}(4x-9)$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \log_{0,3}^2(x+1) - 7 \log_{0,3}(x+1) - 4 \leq 0$;

2) $3 \log_4^2 x - 7 \log_4 16x + 30 < 0$;

3) $3 \log_{\frac{1}{3}}^2(2x+1) + 5 \log_{\frac{1}{3}}(2x+1) - 2 > 0$;

4) $\log_3^2 x + 3 \log_3 9x - 24 < 0$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(x^2-5x+4) < 2$;

2) $\log_3(x^2-4x+3) < 1$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-10x+9) > -2$;

4) $\log_{\frac{1}{4}}(2x^2-6x+4) > -1$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(\log_3 x) > 1$; 2) $\log_2(\log_4 x) > -1$; 3) $\log_2(\log_3 x) < 2$; 4) $\log_3(\log_2 x) < 1$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{3}\log_2(x+1)^3 < -\log_2 3$;

2) $2\log_{0.5}\sqrt{x+1} < -\log_{0.5} 5$;

3) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq 0$;

4) $\log_{\frac{2}{5}} \log_3(x+2) > 0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x^{16} - \lg x^8 + 1 \leq 0$;

2) $\log_2 x^{12} + \log_2 x^4 - 4 > 0$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x - 2) < \log_2(x^3 - x^2 + 4x - 3)$;

2) $\lg(x^3 - x^2 - x + 20) \geq \lg(x + 2) + \lg(x^2 - 2x + 4)$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2^2 x + 3\log_2 x \leq 2,5 \cdot \log_{4\sqrt{2}} 16$;

2) $\log_2^2 x + 3\log_2 x \leq 5 \cdot \log_2 \sqrt[5]{16}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{x+2}(5-x) < 1$; 2) $\log_{2x-3} x \geq 1$;

3) $\log_{x-1} 9 \leq 1$;

4) $\log_{x-9} 2 > \log_{\sqrt{x-9}} 2$.

8. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_4(x-1)$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_5 \log_{\frac{1}{3}}(2-x)$.

VIII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

.....
.....
.....
.....
.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....
.....
.....
.....
.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....
.....
.....
.....
.....

Можливі теми учнівських проєктів

1. Дослідження логарифмічних нерівностей із параметрами.
2. Логарифмічні нерівності в прикладних задачах.
3. Комп'ютерне моделювання розв'язків логарифмічних нерівностей.
4. Логарифмічні нерівності, що зводяться до квадратичних чи дробово-раціональних нерівностей.
5. Програмування алгоритмів розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей.