11 Тема 3. Піраміди

Урок 2. Неправильні піраміди з рівними бічними ребрами або з рівними двогранними кутами при основі

План уроку

1. Властивість висоти піраміди з рівними бічними ребрами.
2. Властивість висоти піраміди з бічними ребрами, що нахилені до основи під однаковими кутами.
3. Властивість висоти піраміди з рівними двогранними кутами при основі.
4. Формула для обчислення бічної поверхні піраміди з рівними двогранними кутами при основі.
5. Розв'язування задач.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки комплексних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2-1];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3-2];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі й шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1];

визначає можливості застосування відомих математичних фактів і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.

2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

6) Сплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можливо визначити положення основи висоти в довільній піраміді?

2) Яку піраміду складніше побудувати — неправильну чи правильну?

3) Чи може опукла піраміда мати площу бічної поверхні меншу від площі основи?

4) Чи може основа висоти піраміди знаходитись поза основою піраміди?

5) Чи може неправильна піраміда мати усі рівні ребра?

II. Повторення (5 хв)

1. Обчисліть площу бічної поверхні правильної восьмикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а апофема становить 16 см.

Відповідь. 384 см^2.

2. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є ромб зі стороною 6 см, а висота призми дорівнює 12 см.

Відповідь. 288 см^2.

3. Обчисліть об'єм піраміди, основою якої є квадрат з діагоналлю $3\sqrt{2}$ см, а висота піраміди дорівнює 12 см.

Відповідь. 36 см^3.

4. Оберіть правильне твердження:

1) якщо пряма в просторі перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу пряму;

2) якщо пряма паралельна площині, то вона паралельна будь-якій прямій цієї площини;

3) якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й іншу площину;

4) якщо дві прямі в просторі не перетинаються, то вони не лежать в одній площині.

Відповідь. 3).

5. Із точки K, яка лежить на бісектрисі кута ABC, проведено перпендикуляри KM і KN до його сторін. Знайдіть відрізок BM, якщо $BN = 6$ см.

Відповідь. 6 см.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На центральному майдані міста виготовляють декоративну металеву конструкцію у формі чотирикутної піраміди. В основі конструкції лежить прямокутник зі сторонами 3 м і 4 м. Усі бічні ребра піраміди завдовжки 6,5 м.

1) Знайдіть об'єм піраміди.

2) Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

3) Скільки квадратних метрів металу потрібно, щоб виготовити поверхню піраміди, якщо на з'єднання швів і можливі відходи витрачається 5% матеріалу додатково?

III. Властивість висоти піраміди з рівними бічними ребрами (5 хв)

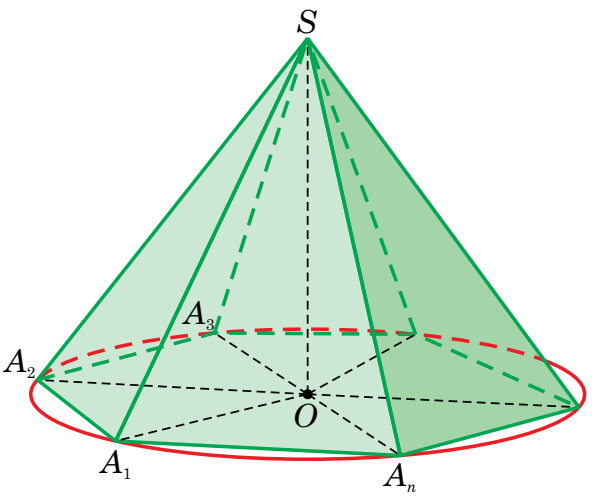
Теорема. **Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди.**

Доведення. Виконаємо побудову (див. рисунок).

Прямокутні трикутники SOA_1, SOA_2, …, SOA_n — рівні, за двома катетами, SO — спільний катет трикутників,

$SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n$, за умовою.

Тому $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$, а отже, точка O є центром описаного кола n-кутника $A_1A_2\ldots A_n$.

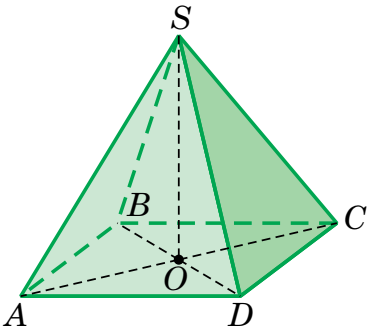


Ілюстративна задача

6. Основа піраміди — прямокутник зі сторонами 12 см і 16 см. Кожне бічне ребро дорівнює 26 см. Знайдіть висоту піраміди.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок). Нехай $SABCD$ — дана піраміда, де основа $ABCD$ — прямокутник зі сторонами $AB = CD = 12$ см, $BC = AD = 16$ см.

Оскільки всі бічні ребра піраміди рівні, то основою висоти є центр описаного навколо прямокутника $ABCD$ кола, тобто точка O, точка перетину діагоналей $ABCD$ є основою висоти.



Із прямокутного трикутника ABC, за теоремою Піфагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$,

$AC = 20$ см.

$AO = \frac{1}{2}AC = 10$ (см).

Із прямокутного трикутника AOS, за теоремою Піфагора:

$SO^2 = AS^2 - AO^2 = 26^2 - 10^2 = (26-10)(26+10) = 16 \cdot 36$, $SO = 24$ см.

Відповідь. 24 см.

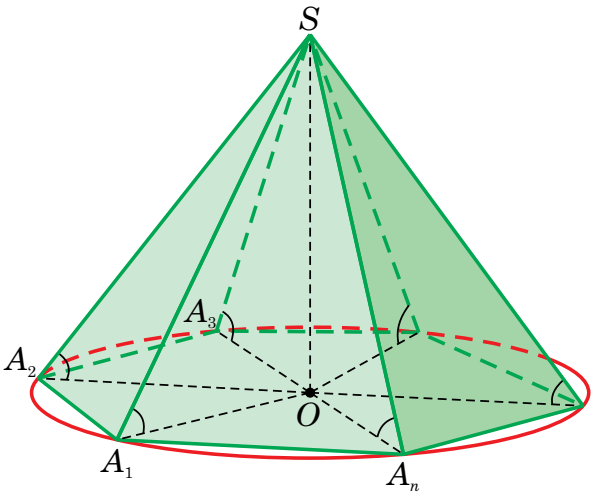
IV. Властивість висоти піраміди з бічними ребрами, що нахилені до основи під однаковими кутами

Теорема. **Якщо всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під рівними кутами, то основою висоти є центр кола, описаного навколо основи піраміди.**

Доведення. Виконаємо побудову (див. рисунок).

Прямокутні трикутники SOA_1, SOA_2, …, SOA_n — рівні, за катетом і протилежним гострим кутом, SO — спільний катет, $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \ldots = \angle SA_nO$, за умовою.

Тому $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$, а отже, точка O є центром описаного кола n-кутника $A_1A_2\ldots A_n$.

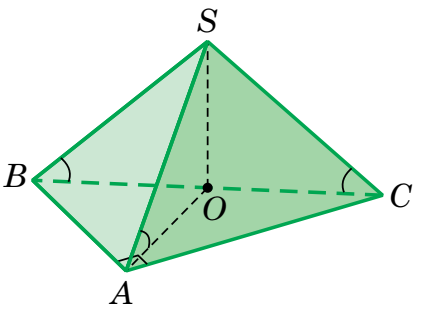


Ілюстративні задачі (5 хв)

7. Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 32 см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо вони утворюють рівні кути з площиною основи.

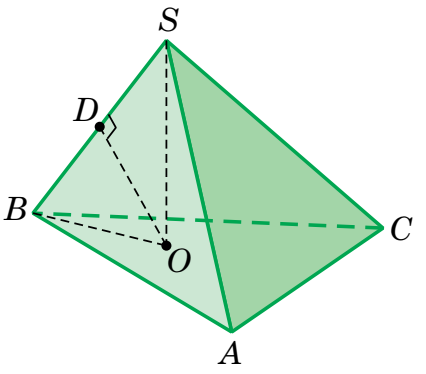
Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок). Нехай $SABC$ — піраміда, в основі якої лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою BC.

Оскільки всі бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи, то точка O, основа висоти, є центром описаного навколо трикутника ABC кола, тобто — середина гіпотенузи BC. Прямокутні трикутники



AOS, BOS, COS — рівні, за катетом і протилежним гострим кутом, тому усі бічні ребра піраміди рівні, тобто $AS = BS = CS$.
Із прямокутного трикутника BOS, за теоремою Піфагора:
$BS^2 = SO^2 + OB^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$, $BS = 20$ см.
Відповідь. 20 см.

8. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом при вершині α. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть відстань від основи висоти піраміди до її бічного ребра.



Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок). Нехай $SABC$ — піраміда, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник ABC з основою AC.
Оскільки всі бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи, то точка O — основа висоти, є центром описаного навколо трикутника ABC кола.

Розглянемо ΔABC: $\angle BAC = \angle BCA = 90° - \frac{\alpha}{2}$,

за умовою, $\frac{a}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = 2R$, $BO = R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$,

за теоремою синусів.
Із прямокутного трикутника SOB:

$$SO = BO\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}},\quad BS = \frac{BO}{\cos\beta} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta}.$$

Знайдемо площу трикутника SOB: $S_{\Delta SOB} = \frac{1}{2}BO \cdot SO = \frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\beta}{8\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

З іншого боку, $S_{\Delta SOB} = \frac{1}{2}BS \cdot OD$, де OD — відстань від основи висоти піраміди до її бічного ребра.

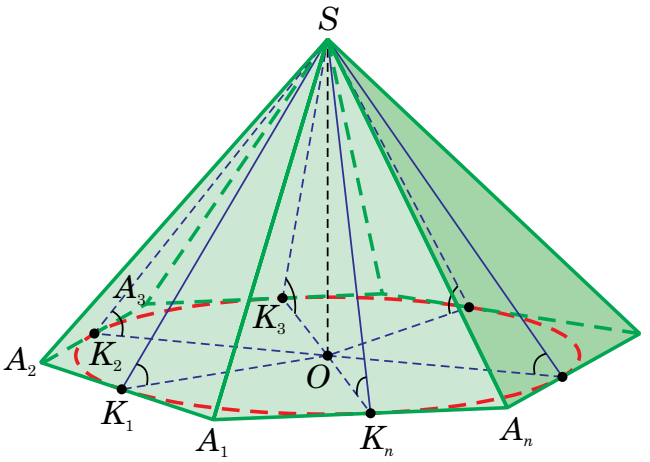
Тоді $\frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\beta}{8\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta} \cdot OD$, звідси $OD = \frac{a\sin\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Відповідь. $\frac{a\sin\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

V. Властивість висоти піраміди з рівними двогранними кутами при основі

Теорема. **Якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні, то основою висоти є центр кола, вписаного в основу піраміди.**

Доведення. Виконаємо побудову (див. рисунок). Із точки O, основи висоти піраміди, проведемо перпендикуляри OK_1, OK_2, … OK_n на сторони A_1A_2, A_2A_3, … , A_nA_1 відповідно.



За теоремою про три перпендикуляри, $SK_1 \perp A_1A_2$, $SK_2 \perp A_2A_3$, … , $SK_n \perp A_nA_1$, тобто кути SK_1O, SK_2O, …, SK_nO є двогранними кутами при основі піраміди.

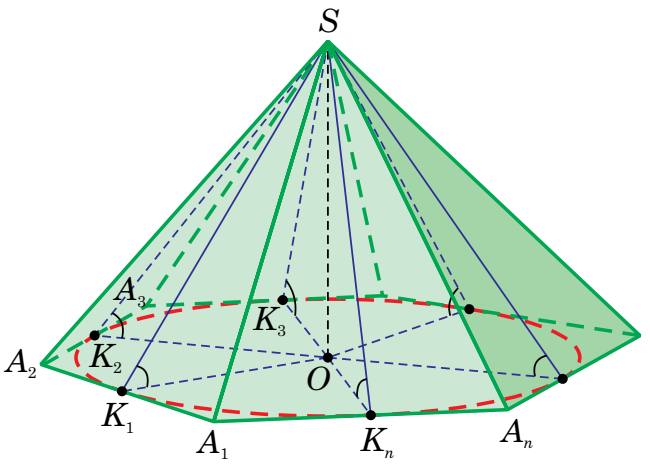
Прямокутні трикутники SOK_1, SOK_2, …, SOK_n — рівні за катетом і протилежним гострим кутом, SO – спільний катет, $\angle SK_1O = \angle SK_2O = \ldots = \angle SK_nO$, за умовою.

Тому $OK_1 = OK_2 = \ldots = OK_n$, а отже, точка O є центром кола, вписаного в n-кутник $A_1A_2\ldots A_n$.

Ілюстративні задачі (5 хв)

9. ***Опорна задача.*** Доведіть, що коли висоти бічних граней піраміди рівні, то основою висоти цієї піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди.

Доведення. Виконаємо побудову (див. рисунок). Із точки O, основи висоти піраміди, проведемо перпендикуляри OK_1, OK_2, … OK_n на сторони A_1A_2, A_2A_3, … , A_nA_1 відповідно.



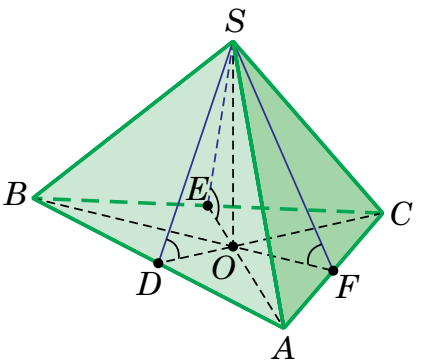
За теоремою про три перпендикуляри, $SK_1 \perp A_1A_2$, $SK_2 \perp A_2A_3$, … , $SK_n \perp A_nA_1$.

Прямокутні трикутники SOK_1, SOK_2, …, SOK_n — рівні, за катетом і гіпотенузою, SO — спільний катет, $SK_1 = SK_2 = \ldots = SK_n$, за умовою.

Тому $OK_1 = OK_2 = \ldots = OK_n$, а отже, точка O є центром кола, вписаного в n-кутник $A_1A_2\ldots A_n$.

10. Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см. Кожний з двогранних кутів при ребрах основи дорівнює 60°. Знайдіть висоту піраміди.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок). Нехай $SABC$ — піраміда, в якої основа є прямокутним трикутником ABC з катетами $AC = 12$ см, $AB = 16$ см. Точка O — основа висоти піраміди.



Оскільки, за умовою, усі двогранні кути при ребрах основи рівні, то точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC.

Точки D, E та F — точки дотику вписаного кола до сторін AB, BC та AC відповідно.

Із прямокутного трикутника ABC, за теоремою Піфагора:
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$, $BC = 20$ см.
Знайдемо радіус вписаного в трикутник ABC кола методом площ:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$ (см²)

$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{16 + 20 + 12}{2} = 24$ (см), де p — півпериметр трикутника ABC.

$S_{\Delta ABC} = p \cdot r$, $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{96}{24} = 4$ (см), де r — радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

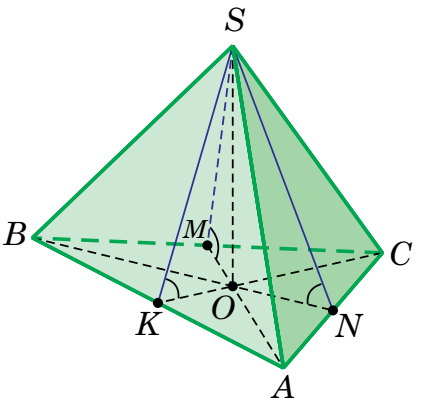
Із прямокутного трикутника SOD: $SO = OD \cdot \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3}$ (см).

Відповідь. $4\sqrt{3}$ см.

VI. Формула для обчислення бічної поверхні піраміди з рівними двогранними кутами при основі

Теорема. **Якщо у піраміди рівні двогранні кути при основі, то $S_б = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$, де $S_б$ — площа бічної поверхні піраміди, $S_{осн}$ — площа основи, α — двогранний кут при основі піраміди.**

Доведення. Доведення проведемо для трикутної піраміди. Виконаємо побудову (див. рисунок).
Для n-кутної піраміди доведення аналогічне.
Проведемо з основи висоти, точки O, перпендикуляри OK, OM, ON на сторони AB, BC, AC відповідно.
Оскільки двогранні кути при основі — рівні, кожен з яких дорівнює α, то точка O — центр вписаного в основу піраміди кола і $OK = OM = ON = r$ є радіусами цього кола.



Площі трикутників: $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OK$,

$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OM$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot ON$,

звідки $S_{осн} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC}$.

Площі трикутників: $S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SK$, $S_{\Delta BSC} = \frac{1}{2} BC \cdot SM$, $S_{\Delta ASC} = \frac{1}{2} AC \cdot SN$, звідки

$S_б = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta ASC}$.

Із прямокутного трикутника SOK: $SK = \frac{OK}{\cos\alpha}$.

Із прямокутного трикутника SOM: $SM = \frac{OM}{\cos\alpha}$.

Із прямокутного трикутника SON: $SN = \frac{ON}{\cos\alpha}$.

Тоді $S_б = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta ASC} = \frac{S_{\Delta AOB}}{\cos\alpha} + \frac{S_{\Delta BOC}}{\cos\alpha} + \frac{S_{\Delta AOC}}{\cos\alpha} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$, що й треба було довести.

Ілюстративні задачі (5 хв)

11. Основою піраміди є ромб зі стороною 8 см і кутом 30°. Кожний із двогранних кутів піраміди при ребрах основи дорівнює 45°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Розв'язання. Площа ромба, який є основою піраміди: $S = a^2 \sin\varphi$, де a — сторона основи ромба, а φ — кут між сторонами ромба. Тоді, $S_{осн} = 64\sin 30° = 32$ (см²).

Площа бічної поверхні піраміди: $S_б = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$, де α — двогранний кут при основі піраміди.

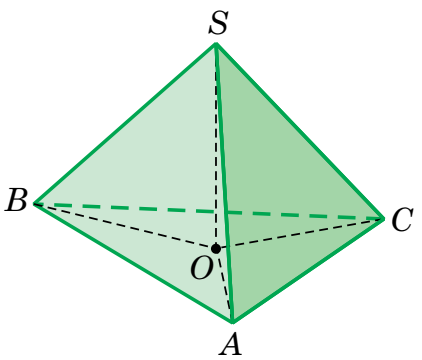
Отже, $S_б = \dfrac{32}{\cos 45°} = 32 : \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 32\sqrt{2}$ (см²).

Відповідь. $32\sqrt{2}$ см².

VII. Розв'язування задач (5 хв)

12. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і з радіусом описаного кола R. Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок). Нехай $SABC$ — дана піраміда, $\angle CAB = \angle ACB = \alpha$. Проведемо висоту SO піраміди.



Тоді OA, OB, OC — проекції бічних ребер на площину основи. За умовою, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$.

Прямокутні трикутники SAO, SBO і SCO мають спільний катет SO і рівні гострі кути, а тому рівні між собою. Тоді $OA = OB = OC$, тобто точка O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC.

За умовою, $OA = R$. Об'єм піраміди: $V = \dfrac{1}{3} S_{осн} H$.

Із трикутника SAO: $H = SO = R\,\mathrm{tg}\,\beta$.

Із трикутника ABC знаходимо: $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = 2R$, $AB = 2R\sin\alpha$.

$$S_{осн} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot(2R\sin\alpha)^2\cdot\sin(180° - 2\alpha) = 2R^2\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha.$$

Отже, $V = \dfrac{1}{3}\cdot 2R^2\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot R\,\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta$.

Відповідь. $\dfrac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta$.

VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

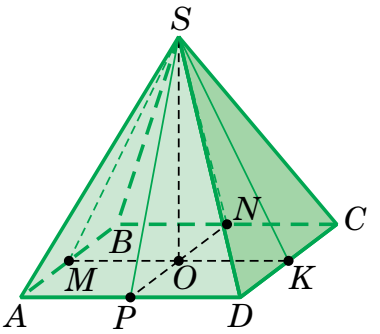
Як я вирішую певну проблему?

Задача. На центральному майдані міста виготовляють декоративну металеву конструкцію у формі чотирикутної піраміди. В основі конструкції лежить прямокутник зі сторонами 3 м і 4 м. Усі бічні ребра піраміди завдовжки 6,5 м.

1) Знайдіть об'єм піраміди.

2) Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

3) Скільки квадратних метрів металу потрібно, щоб виготовити поверхню піраміди, якщо на з'єднання швів і можливі відходи витрачається 5% матеріалу додатково?



Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок). Нехай $SABCD$ — дана піраміда, основа якої прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = CD = 3$ м, $BC = AD = 4$ м, точка O — основа висоти піраміди.

1) Оскільки $SA = SB = SC = SD = 6{,}5$ м, то точка O — центр кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, тобто точка перетину його діагоналей.

Через точку O проведемо прямі MK та NP, які перпендикулярні до сторін прямокутника.

За теоремою про три перпендикуляри, $SM \perp AB$, $SN \perp BC$, $SK \perp CD$, $SP \perp AD$.

Із прямокутного трикутника ABC, за теоремою Піфагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, $AC = 5$ (м).

$AO = BO = CO = DO = 2{,}5$ м.

З прямокутного трикутника AOS:

$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2 = 36$, $SO = 6$ (м).

$S_{осн} = AB \cdot BC = 3 \cdot 4 = 12$ (м^2).

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 6 = 24$ (м^3).

2) За властивістю середньої лінії трикутника, $OM = OK = 2$ см, $ON = OP = 1{,}5$ см.

З прямокутного трикутника SOM, за теоремою Піфагора:

$SM^2 = SO^2 + OM^2 = 6^2 + 2^2 = 40$, $SM = 2\sqrt{10} \approx 6{,}33$ (м).

$S_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} AB \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10} \approx 9{,}5$ (м^2).

Із прямокутного трикутника SON, за теоремою Піфагора:

$SN^2 = SO^2 + ON^2 = 6^2 + 1{,}5^2 = 38{,}25$, $SN = \sqrt{38{,}25} \approx 6{,}2$ (м).

$S_{\Delta BCS} = \frac{1}{2} BC \cdot SN = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6{,}2 \approx 12{,}4$ (м^2).

Площа бічної поверхні: $S_б = 2\left(S_{\Delta ABS} + S_{\Delta BCS}\right) = 19 + 24{,}8 = 43{,}8$ (м^2).

3) $S_п = S_б + S_{осн} = 43{,}8 + 12 = 55{,}8$ (м^2).

5% від 55,8 становить $55{,}8 \cdot 0{,}05 = 2{,}79$ (м^2).

Таким чином, усього потрібно: $55{,}8 + 2{,}79 = 58{,}59$ (м^2) металу.

Відповідь. 1) 24 м^3; 2) 43,8 м^2; 3) 58,59 м^2.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (5–10 хв)

Рівень A

1. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть висоту піраміди.
2. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник із кутом β при вершині та з радіусом описаного кола R. Усі бічні ребра піраміди нахилені до її висоти під кутом α. Знайдіть об'єм піраміди.
3. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 12 см і бічною стороною 10 см. Бічні грані піраміди утворюють з основою рівні двогранні кути по 45°. Знайдіть висоту піраміди.
4. Основою піраміди є прямокутний трикутник. Усі бічні ребра мають однакові довжини. Доведіть, що вершина піраміди проєктується на середину гіпотенузи трикутника, що лежить в основі.
5. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із кутом 30°, протилежний йому катет дорівнює 30 см. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.
6. Кожна бічна грань чотирикутної піраміди, в основі якої лежить квадрат, нахилена до площини основи під кутом 60°. Площа основи піраміди становить 16 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
7. Двогранні кути при основі піраміди дорівнюють по 45°, сторони основи — 7 см, 8 см, 9 см. Знайдіть об'єм піраміди.
8. Сторони основи трикутної піраміди дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см, а кожне бічне ребро дорівнює 24,25 см. Знайдіть об'єм піраміди.

Рівень B

1. Основою піраміди є трикутник зі сторонами $3\sqrt{10}$ см, $3\sqrt{10}$ см і 6 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.
2. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник із кутом α при основі та з радіусом r вписаного кола. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.
3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гострим кутом α і з радіусом r вписаного кола. Усі бічні ребра піраміди рівні. Відрізок, що сполучає середину висоти піраміди з вершиною її основи, нахилений до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.
4. Основою піраміди є ромб. Усі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи піраміди. Доведіть, що довільно вибрані дві бічні грані рівні між собою.
5. Основою піраміди є прямокутник із кутом γ між діагоналями. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють l і нахилені до площини основи під кутом β. Знайти площу основи піраміди.
6. Основою піраміди є прямокутник. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з його стороною кут α. Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут β. Знайдіть висоту піраміди.

7. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює $3\sqrt{10}$ см, а основа становить 6 см. Висота піраміди дорівнює 5 см, а її бічні ребра є рівними. Знайдіть бічне ребро піраміди.

8. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 16 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють по 60°. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні піраміди;
2) висоту піраміди.

Рівень С

1. Основою піраміди є трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють 4 см і 10 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють по 45°, а об'єм піраміди становить $\frac{280}{3}$ см^3. Знайдіть висоту піраміди.

2. Основою піраміди $SABC$ є рівнобедрений трикутник з основою AB. Ребра SA і SB однаково нахилені до площини основи. Доведіть, що вершина піраміди проєктується на пряму CM, де точка M — середина AB.

3. Довжина кожного бічного ребра піраміди дорівнює 55 см. Її основа — трапеція, в якої довжини сторін 14 см, 30 см, 50 см і 30 см. Знайдіть об'єм піраміди.

4. Основа піраміди — прямокутний трикутник. Периметри бічних граней становлять 32 см, 34 см і 36 см. Усі бічні ребра піраміди однаково нахилені до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди.

5. Кожне бічне ребро чотирикутної піраміди дорівнює 39 см, сторони основи дорівнюють 18 см, 18 см, 24 см і 24 см. Знайдіть об'єм піраміди.

6. В основі піраміди лежить ромб із гострим кутом α. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β. Точка висоти піраміди, що міститься на відстані a від вершини піраміди, рівновіддалена від її бічної грані і площини основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

7. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гострим кутом α. Довжина бісектриси трикутника, проведеної з вершини цього кута, дорівнює b. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β. Знайдіть об'єм піраміди.

8. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см. Висота піраміди $H = 3$ см, проходить на однакових відстанях від сторін основи. Знайдіть площу перерізу, який проходить через висоту і найбільше бічне ребро.

X. Рефлексія (2 хв)

1. Я знаю, де міститься основа висоти піраміди, в якої всі бічні ребра рівні.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я знаю, де міститься основа висоти піраміди, в якої бічні ребра нахилені до площини основи під однаковими кутами.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я знаю, де міститься основа висоти піраміди, в якої рівні двогранні кути при основі.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я знаю формулу для обчислення площі бічної поверхні піраміди, в якої рівні двогранні кути при основі.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми учнівських проєктів

1. Моделювання неправильної піраміди з однаковими бічними ребрами.
2. Використання неправильних пірамід у дизайні дахів та споруд.
3. Піраміди в Україні: підходи до вирішення проблем «сміттєвих хеопсів».
4. Створення 3D-моделей неправильних пірамід.
5. Піраміди у природі: кристали, мінерали.
6. Моделювання неправильних пірамід за допомогою Geogebra.