11 Тема 4. Показникова функція

Урок 8. Урок–практикум. Розв'язування показникових нерівностей та їхніх систем

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

1) розв'язувати показникові нерівності різними методами;

2) розв'язувати системи показникових нерівностей різними методами;

3) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-2} = 122$.

2. Розв'яжіть нерівність $3^{x^2} \le 81$.

3. Розв'яжіть нерівність $7^{x+0,5} \le \sqrt{7}$.

4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{\sqrt{2^x}} = 4$.

5. Чи має корінь рівняння $2^x = \sin 3$?

III. Розв'язування показникових нерівностей різними методами

Нагадаємо основні методи розв'язування показникових нерівностей.

1. Метод використання монотонності показникової функції.

2. Метод розкладання на множники.

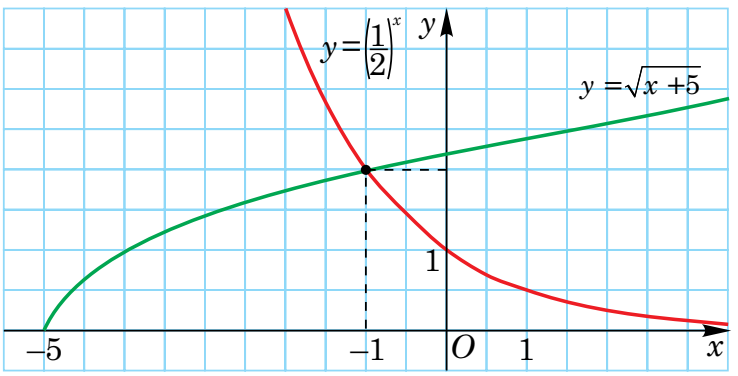
3. Метод заміни змінних.

4. Функціонально-графічний метод.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $0{,}5^x \ge \sqrt{x+5}$.

Розв'язання. Для розв'язування нерівності застосуємо функціонально-графічний метод.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 0{,}5^x$ та $y = \sqrt{x+5}$ (див. рисунок).



Отже, розв'язками нерівності є проміжок [–5; –1].

Відповідь. [–5; –1].

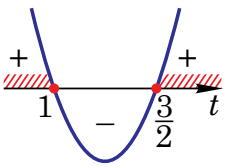
Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} \ge 0$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді: $2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 3\cdot 3^{2x} \ge 0$.

Поділимо обидві частини нерівності на $3^{2x} > 0$, $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 \ge 0$.

Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, тоді $2t^2 - 5t + 3 \ge 0$, $(t-1)(2t-3) \ge 0$.

Побудуємо криву знаків (див. рисунок).



Отже, $t \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$, тобто $\left[\begin{array}{l} t \le 1, \\ t \ge \frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Повернемось до заміни $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x \le \left(\frac{2}{3}\right)^0, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x \ge \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \ge 0, \\ x \le -1. \end{array}\right.$

Таким чином, $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

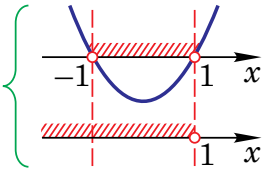
IV. Розв'язування систем показникових нерівностей

Розв'язування систем показникових нерівностей з однією змінною розглянемо на прикладах.

Приклад 3. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 0{,}4^{-x+3} < 0{,}16, \\ 0{,}1^{x^2+1} > 0{,}01. \end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases} 0{,}4^{-x+3} < (0{,}4)^2, \\ 0{,}1^{x^2+1} > (0{,}1)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} -x+3 > 2, \\ x^2+1 < 2; \end{cases}$ $\begin{cases} -x > -1, \\ x^2-1 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ (x-1)(x+1) < 0. \end{cases}$

Позначимо розв'язки кожної нерівності системи на числових осях (див. рисунок).



Отже, $x \in (-1; 1)$.

Відповідь. $(-1; 1)$.

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Після прийому препарату його концентрація в крові пацієнта $C(t)$ (у міліграмах на літр) обчислюється за формулою $C(t) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$, де t — час після прийому препарату (вимірюється в годинах). Для ефективності лікування потрібно, щоб концентрація препарату відповідала межам від 25 мг/л і не перевищувала 100 мг/л, для уникнення токсичного впливу препарату. В який проміжок часу після прийому препарату його концентрація в крові пацієнта перебуватиме в межах норми?

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C

Рівень A

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{1-2^x}$;
2) $f(x) = \sqrt{4^x - 16}$;
3) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4^{x+3} - 64}}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{216 - 6^{x+2}}}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x \cdot 5^x > 0{,}1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5$;
2) $2^{\sqrt{x+1}} > 16 \cdot \sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}}$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[x]{27^{2x-1}} < \sqrt{9^{2x-1}}$;
2) $\sqrt[3]{3^{(1-2x)^{-1}}} \cdot \sqrt{3^{x-14}} \cdot \sqrt[4]{9^{1-1{,}5x}} < 1$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^{2x} + 5^{2x+2} + 5^{2x+4} \le 651$;
2) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} \ge 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

5. Розв'яжіть нерівність функціонально-графічним методом:

1) $2^x - 1 > \sqrt{x}$;
2) $3^x - 1 < -\sqrt{x}$;
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \ge \sqrt{x} + 1$;
4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \sqrt{x} - \frac{2}{3}$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{3x} - 6 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x - 8 > 0$;
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 64 \le 0$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(3^{2x} - 1\right) \cdot \left(3^{4x} + 3^{2x} + 1\right) < 26$;
2) $\left(5^{2x} + 1\right) \cdot \left(5^{4x} - 5^{2x} + 1\right) \ge 126$.

8. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 2^{x+1} > 4, \\ 7^{3x-10} < 49; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+2,5} > \sqrt{2}, \\ 10^{x^2-1} > 1000. \end{cases}$

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність функціонально-графічним методом:

1) $2^x + 1 \geq \cos x$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 < \sin x$;

3) $2^{|x|} + 1 > 2\cos x$;

4) $3^{|x|} \leq \cos 2x$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\sqrt{12}\right)^x \cdot \left(\sqrt{3}\right)^x > \frac{1}{6}$;

2) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x} \cdot \left(\sqrt[3]{9}\right)^{2x} \geq 243$;

3) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} < 0,81^{-2x}$;

4) $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+4} \leq 20,25^{x+1}$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x+1} \cdot 5^{x+3} > 250 \cdot 9^x$;

2) $35^{4x+2} < 5^{3x+4} \cdot 7^{5x}$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^x + 6 \cdot (\sqrt[3]{25})^x + 12 \cdot (\sqrt[3]{5})^x + 8 < 343$;

2) $2^x + 3 \cdot (\sqrt[3]{4})^x + 3 \cdot (\sqrt[3]{2})^x + 1 \leq 27$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left((\sqrt{7})^x - 1\right) \cdot \left(7^x + (\sqrt{7})^x + 1\right) > 342$;

2) $\left((\sqrt[3]{11})^x + 1\right) \cdot \left((\sqrt[3]{121})^x - (\sqrt[3]{11})^x + 1\right) \geq 122$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} \geq \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207$;

2) $\sqrt[4]{16^{x+1}} + 188 \leq 8 \cdot 2^x - 0,5^{3-x}$.

7. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} \left(\sqrt{3}\right)^{6x-2} \geq \frac{1}{81}, \\ (0,2)^{3x+1} \leq 5^{x-1}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (0,3)^{-4x+1} \leq \frac{100}{9}, \\ 10^{2x+4} \geq 1. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geq 0, \\ 25^x + 5^x - 30 \leq 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} < 0, \\ 2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \geq 650. \end{cases}$

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} > \frac{4}{2-\sqrt{3}}$;

2) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\left|x^2+x-12\right|} + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{\left|x^2+x-12\right|} < 10$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{6-x}\left((0,2)^{x^2-7,2x+3,9} - \frac{\sqrt{0,2}}{25}\right) \leq 0$;

2) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.

3. Розв'яжіть нерівність $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{-26x^2} \le \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+36} < \left(\frac{25}{9}\right)^{-6x^2}$.

4. Розв'яжіть нерівність функціонально-графічним методом:

1) $|x-1| \ge 2{,}5^x$;

2) $2^x \le |x-3|$;

3) $|2x-1| \le 3{,}1^x$:

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ge |x+4|$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{12x-1} - 4^{6x+1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} - 1280 < 0$;

2) $3^{x-10} - 2^{x-9} - 3^{x-11} - 2^{x-12} > 0$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{24}{1-25^{-x}} \le \frac{1}{5^{-x}-6}$;

2) $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \le 0$.

7. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x < 0, \\ 3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x - 5\cdot 36^x \ge 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5\cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3\cdot 10^{\frac{1}{x}} \ge 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}, \\ 2\cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9\cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7\cdot 4^{\frac{1}{x}} \ge 0. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 10^{4-x} > 7 + x, \\ \left(2^x - 2\right)\sqrt{x^2 - x - 6} \ge 0. \end{cases}$

Рефлексія

Позначте на числовій прямій свої успіхи в розв'язанні задач сьогоднішнього уроку від 0 балів до 10 балів.

1. Що нового я сьогодні дізнався/дізналася?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2. Які помилки я зробив/зробила на уроці? Як їх виправити в майбутньому?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

3. Які поради я можу запропонувати для однокласників/однокласниць, щоб ефективніше розв'язувати показникові нерівності та їхні системи?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Можливі теми учнівських проєктів

1. Функціонально-графічний метод розв'язування показникових нерівностей та їхніх систем.
2. Показникові нерівності в задачах біології.
3. Показникові нерівності та їхні системи з параметрами.
4. Застосування показникових нерівностей та їхніх систем у фінансовій математиці.
5. Використання Geogebra для візуалізації розв'язання показникових нерівностей та їхніх систем.