11 Тема 4. Показникова функція

Урок 8. Урок–практикум. Розв'язування показникових нерівностей та їхніх систем

План уроку

1. Розв'язування показникових нерівностей різними методами.
2. Розв'язування систем показникових нерівностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє комплексні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1-1];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання комплексних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови, використовуючи статистичні дані, зокрема економічного характеру [12 МАО 2.2.2-1];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі й шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1];

оперує математичними об'єктами в процесі розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.

2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі як групову активність. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому для опису економічних процесів, де зростання залежить від кількох факторів одночасно, зручно користуватися системами показникових нерівностей?

2) У чому полягає різниця між розв'язком однієї нерівності та розв'язком системи нерівностей з однією змінною?

3) Чи можуть системи показникових нерівностей допомогти при моделюванні зростання кількості населення в різних містах чи в державах?

4) Чи допомагають системи показникових нерівностей у фармакології для обчислення концентрації речовини, яка концентрація має перебувати в певному діапазоні?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-2} = 122$.
Відповідь. 2.

2. Розв'яжіть нерівність $3^{x^2} \le 81$.
Відповідь. (–2; 2).

3. Розв'яжіть нерівність $7^{x+0,5} \le \sqrt{7}$.
Відповідь. (–∞; 0].

4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{\sqrt{2^x}} = 4$.
Відповідь. 12.

5. Чи має корінь рівняння $2^x = \sin 3$?

Відповідь. Так.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Після прийому препарату його концентрація в крові пацієнта $C(t)$ (у міліграмах на літр) обчислюється за формулою $C(t) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$, де t — час після прийому препарату (вимірюється в годинах). Для ефективності лікування потрібно, щоб концентрація препарату відповідала межам від 25 мг/л і не перевищувала 100 мг/л, для уникнення токсичного впливу препарату. В який проміжок часу після прийому препарату його концентрація в крові пацієнта перебуватиме в межах норми?

III. Розв'язування показникових нерівностей різними методами

Нагадаємо основні методи розв'язування показникових нерівностей.

1. Метод використання монотонності показникової функції.

2. Метод розкладання на множники.

3. Метод заміни змінних.

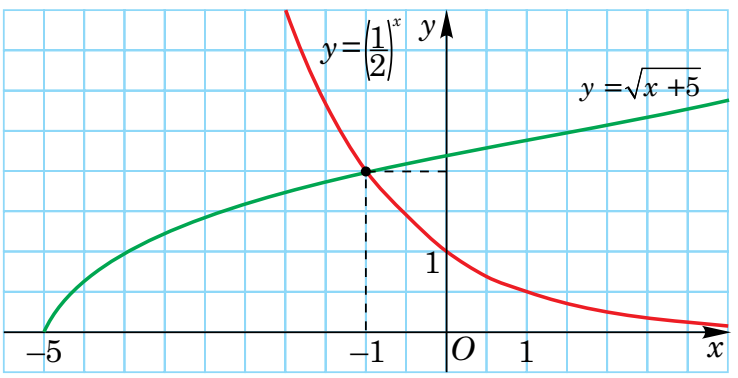
4. Функціонально-графічний метод.

Ілюстративні приклади (10 хв)

6. Розв'яжіть нерівність $0{,}5^x \geq \sqrt{x+5}$.

Розв'язання. Для розв'язування нерівності застосуємо функціонально-графічний метод.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 0{,}5^x$ та $y = \sqrt{x+5}$ (див. рисунок).



Отже, розв'язками нерівності є проміжок [–5; –1].

Відповідь. [–5; –1].

7*. Розв'яжіть нерівність $5^{|x+4|} < 25^{|x|}$.

Розв'язання. $5^{|x+4|} < 25^{|x|}$, $5^{|x+4|} < 5^{2|x|}$.

Оскільки функція $y = 5^x$ є зростаючою на множині дійсних чисел, то дана нерівність рівносильна нерівності $|x+4| < 2|x|$.

Використаємо метод інтервалів і розкриємо модулі:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -4, \\ -x-4 < -2x; \end{cases} \\ \begin{cases} -4 \le x < 0, \\ x+4 < -2x; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x+4 < 2x; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -4, \\ x < 4; \end{cases} \\ \begin{cases} -4 \le x < 0, \\ x < -\dfrac{4}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x > 4; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x < -4, \\ -4 \le x < -\dfrac{4}{3}, \\ x > 4. \end{array}\right.$$

Отже, $x \in \left(-\infty; -\dfrac{4}{3}\right) \cup (4; +\infty)$.

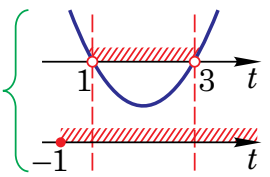
Відповідь. $\left(-\infty; -\dfrac{4}{3}\right) \cup (4; +\infty)$.

8*. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{6 \cdot 3^x - 2} > 3^x + 1$.

Розв'язання. Нехай $3^x = t$, $t > 0$, тоді $\sqrt{6t-2} > t+1$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t+1 < 0, \\ 6t-2 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} t+1 \ge 0, \\ 6t-2 > (t+1)^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < -1, \\ t \ge \dfrac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} t \ge -1, \\ t^2 - 4t + 3 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} t \ge -1, \\ (t-3)(t-1) < 0. \end{cases}$$

Позначимо розв'язки на числовій осі (див. рисунок).



Таким чином, $t \in (1; 3)$, тобто $\begin{cases} t > 1, \\ t < 3. \end{cases}$

Повернемось до заміни $\begin{cases} 3^x > 1, \\ 3^x < 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1. \end{cases}$ Отже, $x \in (0; 1)$.

Відповідь. (0; 1).

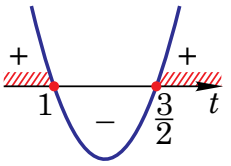
9. Розв'яжіть нерівність $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \ge 0$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді: $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} \ge 0$.

Поділимо обидві частини нерівності на $3^{2x} > 0$, $2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 3 \ge 0$.

Нехай $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = t$, тоді $2t^2 - 5t + 3 \ge 0$, $(t-1)(2t-3) \ge 0$.

Побудуємо криву знаків (див. рисунок).



Отже, $t \in (-\infty; 1] \cup \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$, тобто $\left[\begin{array}{l} t \le 1, \\ t \ge \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Повернемось до заміни $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x \le \left(\frac{2}{3}\right)^0,\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x \ge \left(\frac{2}{3}\right)^{-1};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x \ge 0,\\ x \le -1.\end{array}\right.$

Таким чином, $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

IV. Розв'язування систем показникових нерівностей

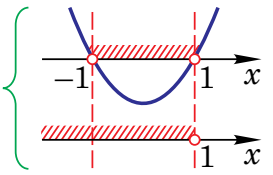
Розв'язування систем показникових нерівностей з однією змінною розглянемо на прикладах.

Ілюстративні приклади (8-10 хв)

10. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases}0{,}4^{-x+3} < 0{,}16,\\ 0{,}1^{x^2+1} > 0{,}01.\end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases}0{,}4^{-x+3} < (0{,}4)^2,\\ 0{,}1^{x^2+1} > (0{,}1)^2;\end{cases}$ $\begin{cases}-x+3 > 2,\\ x^2+1 < 2;\end{cases}$ $\begin{cases}-x > -1,\\ x^2-1 < 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x < 1,\\ (x-1)(x+1) < 0.\end{cases}$

Позначимо розв'язки кожної нерівності системи на числових осях (див. рисунок).



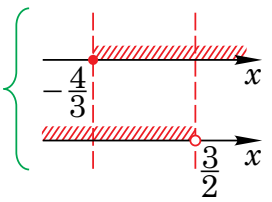
Отже, $x \in (-1; 1)$.

Відповідь. $(-1; 1)$.

11. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases}\left(\sqrt{2}\right)^{-3x-1} \le 2\sqrt{2},\\ \left(\sqrt{0{,}4}\right)^{4x-2} > 0{,}16.\end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases}\left(\sqrt{2}\right)^{-3x-1} \le \left(\sqrt{2}\right)^3,\\ (0{,}4)^{2x-1} > (0{,}4)^2;\end{cases}$ $\begin{cases}-3x-1 \le 3,\\ 2x-1 < 2;\end{cases}$ $\begin{cases}-3x \le 4,\\ 2x < 3;\end{cases}$ $\begin{cases}x \ge -\frac{4}{3},\\ x < \frac{3}{2}.\end{cases}$

Позначимо розв'язки кожної нерівності системи на числових осях (див. рисунок).



Отже, $x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Відповідь. $\left[-\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

12. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases}7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5,\\ 9 \cdot 3^{x-1} + 3^x \le 36.\end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases}7^x\left(7^2-14\right) > 5,\\ 3^{x-1}(9+3) \le 36;\end{cases}$ $\begin{cases}7^x \cdot 35 > 5,\\ 3^{x-1} \cdot 12 \le 36;\end{cases}$ $\begin{cases}7^x > \frac{1}{7},\\ 3^{x-1} \le 3;\end{cases}$ $\begin{cases}x > -1,\\ x-1 \le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x > -1,\\ x \le 2.\end{cases}$

Отже, $x \in (-1; 2]$.
Відповідь. $(-1; 2]$.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Після прийому препарату його концентрація в крові пацієнта $C(t)$ (у міліграмах на літр) обчислюється за формулою $C(t) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$, де t — час після прийому препарату (вимірюється в годинах). Для ефективності лікування потрібно, щоб концентрація препарату відповідала межам від 25 мг/л і не перевищувала 100 мг/л, для уникнення токсичного впливу препарату. В який проміжок часу після прийому препарату його концентрація в крові пацієнта перебуватиме в межах норми?

Розв'язання. Математичною моделлю даної задачі є система нерівностей:

$$\begin{cases} 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} > 25, \\ 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \le 100; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} > \frac{1}{8}, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \le \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3}, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \le \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{t}{3} < 3, \\ \frac{t}{3} \ge 1; \end{cases} \quad \begin{cases} t < 9, \\ t \ge 3. \end{cases}$$

Маємо розв'язки системи нерівностей $t \in [3; 9)$.
Отже, від 3 годин до 9 годин після прийому препарату його концентрація перебуватиме в межах норми.
Відповідь. Від 3 до 9 годин.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (5–10 хв)

Рівень A

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{1 - 2^x}$;
2) $f(x) = \sqrt{4^x - 16}$;
3) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4^{x+3} - 64}}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{216 - 6^{x+2}}}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x \cdot 5^x > 0{,}1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5$;
2) $2^{\sqrt{x+1}} > 16 \cdot \sqrt{(0{,}25)^{5 - \frac{x}{4}}}$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[x]{27^{2x-1}} < \sqrt{9^{2x-1}}$;
2) $\sqrt[3]{3^{(1-2x)^{-1}}} \cdot \sqrt{3^{x-14}} \cdot \sqrt[4]{9^{1-1{,}5x}} < 1$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^{2x} + 5^{2x+2} + 5^{2x+4} \le 651$;
2) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} \ge 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

5. Розв'яжіть нерівність функціонально-графічним методом:

1) $2^x - 1 > \sqrt{x}$;
2) $3^x - 1 < -\sqrt{x}$;
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \ge \sqrt{x} + 1$;
4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \sqrt{x} - \frac{2}{3}$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{3x}-6\cdot 2^{2x}+12\cdot 2^{x}-8>0$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}-12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-64\le 0$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(3^{2x}-1\right)\cdot\left(3^{4x}+3^{2x}+1\right)<26$;

2) $\left(5^{2x}+1\right)\cdot\left(5^{4x}-5^{2x}+1\right)\ge 126$.

8. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}2^{x+1}>4,\\ 7^{3x-10}<49;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+2,5}>\sqrt{2},\\ 10^{x^2-1}>1000.\end{cases}$

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність функціонально-графічним методом:

1) $2^{x}+1\ge\cos x$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+1<\sin x$;

3) $2^{|x|}+1>2\cos x$;

4) $3^{|x|}\le\cos 2x$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\sqrt{12}\right)^{x}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{x}>\frac{1}{6}$;

2) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x}\cdot\left(\sqrt[3]{9}\right)^{2x}\ge 243$;

3) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3}<0,81^{-2x}$;

4) $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+4}\le 20,25^{x+1}$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x+1}\cdot 5^{x+3}>250\cdot 9^{x}$;

2) $35^{4x+2}<5^{3x+4}\cdot 7^{5x}$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^{x}+6\cdot(\sqrt[3]{25})^{x}+12\cdot(\sqrt[3]{5})^{x}+8<343$;

2) $2^{x}+3\cdot(\sqrt[3]{4})^{x}+3\cdot(\sqrt[3]{2})^{x}+1\le 27$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left((\sqrt{7})^{x}-1\right)\cdot\left(7^{x}+(\sqrt{7})^{x}+1\right)>342$;

2) $\left((\sqrt[3]{11})^{x}+1\right)\cdot\left((\sqrt[3]{121})^{x}-(\sqrt[3]{11})^{x}+1\right)\ge 122$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}\ge\sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}}+207$;

2) $\sqrt[4]{16^{x+1}}+188\le 8\cdot 2^{x}-0,5^{3-x}$.

7. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}\left(\sqrt{3}\right)^{6x-2}\ge\frac{1}{81},\\ (0,2)^{3x+1}\le 5^{x-1};\end{cases}$

2) $\begin{cases}(0,3)^{-4x+1}\le\frac{100}{9},\\ 10^{2x+4}\ge 1.\end{cases}$

8. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}0,25^{x}-12\cdot 0,5^{x}+32\ge 0,\\ 25^{x}+5^{x}-30\le 0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}5^{x}+5^{x-1}-5^{x-2}<0,\\ 2\cdot 6^{x}+3\cdot 6^{x+3}\ge 650.\end{cases}$

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}>\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$;

2) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\left|x^2+x-12\right|}+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{\left|x^2+x-12\right|}<10$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{6-x}\left((0,2)^{x^2-7,2x+3,9}-\dfrac{\sqrt{0,2}}{25}\right)\le 0$;

2) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.

3. Розв'яжіть нерівність $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)^{-26x^2}\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2+36}<\left(\dfrac{25}{9}\right)^{-6x^2}$.

4. Розв'яжіть нерівність функціонально-графічним методом:

1) $|x-1|\ge 2,5^x$;

2) $2^x\le|x-3|$;

3) $|2x-1|\le 3,1^x$:

4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\ge|x+4|$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{12x-1}-4^{6x+1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}-1280<0$;

2) $3^{x-10}-2^{x-9}-3^{x-11}-2^{x-12}>0$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{24}{1-25^{-x}}\le\dfrac{1}{5^{-x}-6}$;

2) $\dfrac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\le 0$.

7. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}3\cdot 4^x+2\cdot 9^x-5\cdot 6^x<0,\\ 3\cdot 16^x+2\cdot 81^x-5\cdot 36^x\ge 0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}5\cdot 25^{\frac{1}{x}}+3\cdot 10^{\frac{1}{x}}\ge 2\cdot 4^{\frac{1}{x}},\\ 2\cdot 49^{\frac{1}{x}}-9\cdot 14^{\frac{1}{x}}+7\cdot 4^{\frac{1}{x}}\ge 0.\end{cases}$

8. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases}10^{4-x}>7+x,\\ \left(2^x-2\right)\sqrt{x^2-x-6}\ge 0.\end{cases}$

VII. Рефлексія (2 хв)

Позначте на числовій прямій свої успіхи в розв'язанні задач сьогоднішнього уроку від 0 балів до 10 балів.

1. Що нового я сьогодні дізнався/дізналася?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2. Які помилки я зробив/зробила на уроці? Як їх виправити в майбутньому?

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

3. Які поради я можу запропонувати для однокласників/однокласниць, щоб ефективніше розв'язувати показникові нерівності та їхні системи?

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Можливі теми учнівських проєктів

1. Функціонально-графічний метод розв'язування показникових нерівностей та їхніх систем.

2. Показникові нерівності в задачах біології.

3. Показникові нерівності та їхні системи з параметрами.

4. Застосування показникових нерівностей та їхніх систем у фінансовій математиці.

5. Використання Geogebra для візуалізації розв'язання показникових нерівностей та їхніх систем.