11 Тема 4. Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 10. Урок-практикум. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) зрозумієте, як розв'язувати системи тригонометричних рівнянь методом додавання;

2) з'ясуєте, як розв'язувати системи рівнянь методом множення;

3) навчитеся використовувати основні нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь;

4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Визначте знак виразу cos 5.

2. Знайдіть головний період функції $f(x) = \sin^2 x$.

3. Спростіть вираз $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

4. Обчисліть: $\dfrac{\operatorname{tg}72^\circ - \operatorname{ctg}48^\circ}{1+\operatorname{tg}72^\circ\cdot\operatorname{ctg}48^\circ}$.

5. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}2x = -1$.

III. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь методом додавання рівнянь системи

Теорема. **Якщо в системі рівнянь** $\begin{cases} F(x;y)=0, \\ G(x;y)=0 \end{cases}$ **замінити одне з рівнянь рівнянням** $F(x;y)+G(x;y)=0$ **або рівнянням** $F(x;y)-G(x;y)=0$**, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.**

Сформульована теорема лежить в основі методу додавання для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

Розв'язання. Додамо й віднімемо рівняння системи, отримуємо рівносильну систему: $\begin{cases} \sin x \sin y + \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0. \end{cases}$

Застосуємо формули косинуса різниці та косинуса суми двох кутів:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x+y) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x+y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x+y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z. \end{cases}$$

Додамо і віднімемо рівняння останньої системи:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi(2k+n),\ k, n \in Z, \\ 2y = \dfrac{\pi}{3} + \pi(n-2k),\ n, k \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{3} + \pi(2k+n),\ k, n \in Z, \\ 2y = \dfrac{2\pi}{3} + \pi(n-2k),\ n, k \in Z. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}(2k+n),\ k, n \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(n-2k),\ n, k \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(2k+n),\ k, n \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}(n-2k),\ n, k \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}(2k+n);\ \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(2k+n);\ \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $k \in Z$, $n \in Z$.

IV. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь методом множення (ділення) рівнянь системи

Теорема. **Якщо в системі рівнянь** $\begin{cases} F(x;y)=c_1, \\ G(x;y)=c_2, \end{cases}$ **де** $c_1 \neq 0$ **і** $c_2 \neq 0$**, замінити одне з рівнянь рівнянням** $F(x;y)G(x;y)=c_1c_2$ **або рівнянням** $\dfrac{F(x;y)}{G(x;y)}=\dfrac{c_1}{c_2}$**, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.**

Сформульована теорема лежить в основі методу множення для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2, \\ 2\cos x\cos y=1. \end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=2, \\ \cos x\cos y=0{,}5. \end{cases}$

Перемноживши перше й друге рівняння системи, отримаємо: $\sin(x+y)=1$,

$x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, звідси $y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x$.

Підставимо вираз для (y) у друге рівняння системи:

$\cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x\right)=0{,}5$, $\cos x\sin x=0{,}5$, $\sin 2x=1$,

$2x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

Тоді $y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-\dfrac{\pi}{4}-\pi n$, $k\in Z$, $n\in Z$; $y=\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k-n)$, $k\in Z$, $n\in Z$.

Відповідь. $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k-n)\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$.

V. Нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь

Нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь дозволяють поєднувати різні методи розв'язування систем. До нестандартних методів розв'язування систем тригонометричних рівнянь можна віднести:

1) піднесення одного чи обох рівнянь до квадрата і переході до системи-наслідку, можна розв'язати одним із уже відомих способів;

2) застосування заміни змінних;

3) застосування формул перетворення добутку в суму чи суми в добуток до певного рівняння системи;

4) геометрична інтерпретація рівнянь системи (побудова графіків рівнянь для оцінки наявності розв'язків чи їхньої кількості);

5) оцінка лівої й правої частин рівнянь, що входять до системи;

6) використання властивостей функцій (монотонності, знакосталості, парності, періодичності тощо).

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Два генератори створюють гармонічні коливання з однаковими частотами, але з різними фазами, які описуються рівняннями $f_1(t) = \sin(80\pi t + \alpha)$ і $f_2(t) = \sin(80\pi t + \beta)$, де $f_1(t)$ і $f_2(t)$ — функції гармонічних коливань (у нанометрах, 10^{-9} м), t — час (у секундах), α і β — фази коливань. Якими мають бути фази цих коливань, щоб у момент часу $t = \frac{1}{80}$ с від початку коливання сума зміщень дорівнювала б 1 нм, а в момент часу $t = \frac{1}{160}$ с — становила би $\sqrt{3}$ нм?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C

Рівень A

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos(x+y) = 0, \\ \cos(x-y) = 1. \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin y \sin x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \sin y, \\ \cos^2 x = \sin x \cos y. \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\cos x = 1 + \cos y, \\ 2\sin x = \sin y. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \dfrac{1}{9}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}36, \\ \sin x \sin y = 0{,}36. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos(x+y) = 0, \\ 3\sin x = 2\sin y. \end{cases}$

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{5}\cos y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y, \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}25, \\ \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 0{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{y-x}{2} = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x \cos y = -\dfrac{1}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \sin x = \cos 2y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + \sin(x+y) = 1{,}5, \\ 3x - \sin(x+y) = 2{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos(x-y) - 2y = -1{,}5, \\ 3\cos(x-y) + y = 2{,}5. \end{cases}$

Рівень С

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos(x-2y) = a\cos^3 y, \\ \sin(x-2y) = a\cos^3 y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{2}\sin y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2}\cos y. \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos^2 y + 3\sin x \sin y = 0, \\ 21\cos 2x - \cos 2y = 10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}. \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg}\left(3y - 5\cos^2 x\right) = 1, \\ 3y - 10\cos^2 x = \frac{\pi}{4} - 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(2y - \cos^2 x\right) = 1, \\ 6y - 15\cos^2 x = \frac{3}{4}\pi - 1. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3\sin 2x - 2\sin 2y = \frac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x + \cos x = 2 + \sin y + \cos y, \\ 2\sin 2x + \sin 2y = 1. \end{cases}$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin^2(-2x) + (3-\sqrt{2})\operatorname{tg}(5y) = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2(5y) + (3-\sqrt{2})\sin(-2x) = \frac{1}{2}(3\sqrt{2}-1); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos^2(4x) + \frac{\sqrt{26}-2}{2}\operatorname{tg}(-2y) = \frac{\sqrt{26}-1}{4}, \\ \operatorname{tg}^2(-2y) - \frac{\sqrt{26}-2}{2}\cos(4x) = \frac{\sqrt{26}-1}{4}. \end{cases}$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin^2(3x) + (4-\sqrt{3})\operatorname{ctg}(-7y) = 2\sqrt{3} - 0{,}75, \\ \operatorname{ctg}^2(-7y) + (4-\sqrt{3})\sin(3x) = 2\sqrt{3} - 0{,}75; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos^2(6x) + (\sqrt{5}-1)\operatorname{ctg}(-9y) = \frac{1}{4}(2\sqrt{5}-1), \\ \operatorname{ctg}^2(-9y) + (\sqrt{5}-1)\cos(6x) = \frac{1}{4}(2\sqrt{5}-1). \end{cases}$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ \cos^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg} y - 1 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y + 0{,}25}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}} = 0, \\ 4\cos^2 x + \operatorname{tg} y - 1 = 0. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \operatorname{ctg}^4 2x + 32\sin^2 y = 55, \\ \dfrac{1}{\sin^2 2x} - 4\cos y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \left|\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \sin y - \cos y, \\ \sin 2y + 2\sin 2x = \dfrac{3}{4} + 2\sin^3 2x. \end{cases}$

Рефлексія

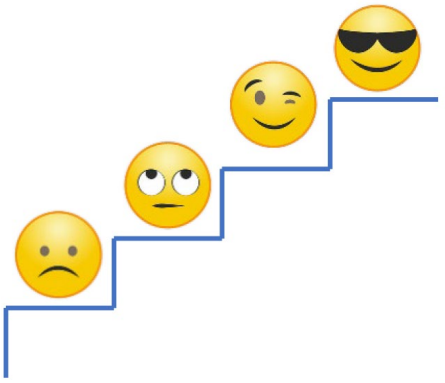
Зобразіть сходи успіху і позначте свій рівень розуміння теми уроку.

1 сходинка — «Мені складно, потрібно ще попрацювати».

2 сходинка — «Я щось зрозумів/зрозуміла, але ще маю запитання».

3 сходинка — «Можу розв'язувати завдання самостійно».

4 сходинка — «Можу пояснити завдання іншим».



Можливі теми проєктів

1. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь із параметром.

2. Застосування симетрії тригонометричних функцій при розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь.

3. Застосування обернених тригонометричних функцій при розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь.

4. Використання методу мажоранти (міноранти) для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

5. Системи тригонометричних рівнянь в астрономії.