11 Тема 4. Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 10. Урок-практикум. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь

План уроку

1. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь методом додавання.
2. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь методом множення (ділення).
3. Нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

інтерпретує, аналізує, систематизує дані та зв'язки між ними [12 МАО 1.2.2-1];

визначає компоненти математичної моделі комплексної проблемної ситуації, а також взаємозв'язки між ними [12 МАО 2.3.1-1];

класифікує і структурує математичні поняття та факти [12 МАО 4.1.2-1];

виокремлює в конкретній комплексній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1-2];

визначає, яких даних недостатньо для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-2];

за потреби, виправляє помилки і вносить зміни в математичну модель та/або спосіб розв'язання [12 МАО 3.2.3-1];

визначає можливості застосування відомих математичних фактів та послідовностей дій у подібних ситуаціях [12 МАО 4.2.1-1];

доцільно та правильно використовує математичну термінологію й символіку [12 МАО 4.3.1-2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.

2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

6) Сплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності A, B, C.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи завжди достатньо одного рівняння для опису руху тіл?

2) Чи можливо передбачити момент згасання звуку чи світлової хвилі за допомогою тригонометричних рівнянь?

3) Чи можна за допомогою системи тригонометричних рівнянь змоделювати рух маятника у двох площинах?

4) Чи доцільно знаходити точне розв'язання системи тригонометричних рівнянь, якщо можна змоделювати певний процес на комп'ютері?

5) Чому не існує єдиного методу розв'язування тригонометричних рівнянь?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Визначте знак виразу $\cos 5$.

Відповідь. $\cos 5 > 0$.

2. Знайдіть головний період функції $f(x) = \sin^2 x$.

Відповідь. π.

3. Спростіть вираз $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

Відповідь. 1.

4. Обчисліть: $\dfrac{\operatorname{tg}72^\circ - \operatorname{ctg}48^\circ}{1+\operatorname{tg}72^\circ \cdot \operatorname{ctg}48^\circ}$.

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}2x = -1$.

Відповідь. $-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Два генератори створюють гармонічні коливання з однаковими частотами, але з різними фазами, які описуються рівняннями $f_1(t)=\sin(80\pi t+\alpha)$ і $f_2(t)=\sin(80\pi t+\beta)$, де $f_1(t)$ і $f_2(t)$ — функції гармонічних коливань (у нанометрах, 10^{-9} м), t — час (у секундах), α і β — фази коливань. Якими мають бути фази цих коливань, щоб у момент часу $t=\dfrac{1}{80}$ с від початку коливання сума зміщень дорівнювала б 1 нм, а в момент часу $t=\dfrac{1}{160}$ с — становила би $\sqrt{3}$ нм?

III. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь методом додавання рівнянь системи

Теорема. **Якщо в системі рівнянь** $\begin{cases} F(x;y)=0, \\ G(x;y)=0 \end{cases}$ **замінити одне з рівнянь рівнянням** $F(x;y)+G(x;y)=0$ **або рівнянням** $F(x;y)-G(x;y)=0$**, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.**

Сформульована теорема лежить в основі методу додавання для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

Ілюстративні приклади (7–10 хв)

6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

Розв'язання. Додамо й віднімемо рівняння системи, отримуємо рівносильну систему: $\begin{cases} \sin x \sin y + \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0. \end{cases}$

Застосуємо формули косинуса різниці та косинуса суми двох кутів:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x+y) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k,\ k\in Z, \\ x+y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z, \\ x+y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z. \end{cases}$$

Додамо і віднімемо рівняння останньої системи:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x=\dfrac{2\pi}{3}+\pi(2k+n),\ k,\ n\in Z, \\ 2y=\dfrac{\pi}{3}+\pi(n-2k),\ n,\ k\in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{3}+\pi(2k+n),\ k,\ n\in Z, \\ 2y=\dfrac{2\pi}{3}+\pi(n-2k),\ n,\ k\in Z. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(2k+n),\ k,\ n\in Z, \\ y=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(n-2k),\ n,\ k\in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(2k+n),\ k,\ n\in Z, \\ y=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(n-2k),\ n,\ k\in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(2k+n);\ \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(2k+n);\ \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $k\in \mathrm{Z}$, $n\in \mathrm{Z}$.

7. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sin x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin y, \\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=\cos y. \end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x-1}{\sin x}=\sin y, \\ \dfrac{\cos^2 x-1}{\cos x}=\cos y; \end{cases} \quad \begin{cases} -\cos^2 x=\sin x\sin y, \\ -\sin^2 x=\cos x\cos y, \\ \sin x\neq 0, \\ \cos x\neq 0. \end{cases}$

Додамо перше та друге рівняння системи:

$-\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\sin x\sin y+\cos x\cos y$.

Тоді $\cos(x-y)=-1$, звідси $x-y=\pi+2\pi k$, $k\in \mathrm{Z}$.

Виразимо x через y: $x=\pi+2\pi k+y$.

Підставимо отриманий вираз відносно x у перше рівняння останньої системи:

$-\cos^2 y=-\sin^2 y$, $\cos^2 y-\sin^2 y=0$, $\cos 2y=0$,

$2y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \mathrm{Z}$; $y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in \mathrm{Z}$.

Тоді $x=\dfrac{5\pi}{4}+\pi\left(2k+\dfrac{n}{2}\right)$.

При знайдених значеннях x і y $\cos x\neq 0$ і $\sin x\neq 0$.

Відповідь. $\left(\dfrac{5\pi}{4}+\pi\left(2k+\dfrac{n}{2}\right);\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $k\in \mathrm{Z}$, $n\in \mathrm{Z}$.

IV. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь методом множення (ділення) рівнянь системи

Теорема. **Якщо в системі рівнянь** $\begin{cases} F(x;y)=c_1, \\ G(x;y)=c_2, \end{cases}$ **де** $c_1 \neq 0$ **і** $c_2 \neq 0$**, замінити одне з рівнянь рівнянням** $F(x;y)G(x;y)=c_1c_2$ **або рівнянням** $\dfrac{F(x;y)}{G(x;y)}=\dfrac{c_1}{c_2}$**, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.**

Сформульована теорема лежить в основі методу множення для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

Ілюстративний приклад (5–7 хв)

8. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2, \\ 2\cos x\cos y=1. \end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=2, \\ \cos x\cos y=0{,}5. \end{cases}$

Перемноживши перше й друге рівняння системи, отримаємо: $\sin(x+y)=1$,

$x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, звідси $y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x$.

Підставимо вираз для (y) у друге рівняння системи:

$\cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x\right)=0{,}5$, $\cos x\sin x=0{,}5$, $\sin 2x=1$,

$2x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

Тоді $y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-\dfrac{\pi}{4}-\pi n$, $k\in Z$, $n\in Z$; $y=\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k-n)$, $k\in Z$, $n\in Z$.

Відповідь. $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k-n)\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$.

V. Нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь

Нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь дозволяють поєднувати різні методи розв'язування систем. До нестандартних методів розв'язування систем тригонометричних рівнянь можна віднести:

1) піднесення одного чи обох рівнянь до квадрата і переході до системи-наслідку, можна розв'язати одним із уже відомих способів;

2) застосування заміни змінних;

3) застосування формул перетворення добутку в суму чи суми в добуток до певного рівняння системи;

4) геометрична інтерпретація рівнянь системи (побудова графіків рівнянь для оцінки наявності розв'язків чи їхньої кількості);

5) оцінка лівої й правої частин рівнянь, що входять до системи;

6) використання властивостей функцій (монотонності, знакосталості, парності, періодичності тощо).

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

9. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 5\cos x - \cos y = 3 \\ 2\sin x \sin(y - x) + \cos y = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Для другого рівняння системи використаємо формулу перетворення добутку синусів у суму:

$\cos(2x - y) - \cos y + \cos y = 1$, $\cos(2x - y) = 1$, $2x - y = 2\pi n$, $n \in Z$; $y = 2x - 2\pi n$.

Підставимо вираз для (y) у перше рівняння системи:

$5\cos x - \cos 2x = 3$, $5\cos x - \left(2\cos^2 x - 1\right) = 3$, $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Звідки отримуємо, що $\cos x = \frac{1}{2}$ або $\cos x = 2$.

1) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2) $\cos x = 2$ — рівняння коренів не має.

Оскільки $y = 2x - 2\pi n$, то:

$y = \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi k - 2\pi n$, $k \in Z$, $n \in Z$.

Відповідь. $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi k - 2\pi n\right)$, $k \in Z$, $n \in Z$.

10. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sin y = 3\sin x, \\ \cos y + 2\cos x = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Перепишемо систему у вигляді: $\begin{cases} \sin y = 3\sin x, \\ \cos y = 1 - 2\cos x. \end{cases}$

Піднесемо обидва рівняння системи до квадрата й знайдемо їхню суму:

$\begin{cases} \sin^2 y = 9\sin^2 x, \\ \cos^2 y = 1 - 4\cos x + 4\cos^2 x; \end{cases}$

$1 = 9\sin^2 x + 1 - 4\cos x + 4\cos^2 x$, $9 - 9\cos^2 x - 4\cos x + 4\cos^2 x = 0$,

$5\cos^2 x + 4\cos x - 9 = 0$.

Тоді: $\cos x = 1$, $\cos x = -\frac{9}{5}$.

1) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

2) $\cos x = -\frac{9}{5}$, рівняння коренів не має.

Підставимо $\cos x = 1$ у друге рівняння системи: $\cos y = -1$, $y = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

Оскільки були використані нерівносильні перетворення, тобто піднесення до квадрата, то зробимо перевірку отриманих розв'язків:

1) $\sin(\pi + 2\pi k) = 0$, $3\sin(2\pi k) = 0$.

2) Оскільки $\cos x = 1$ і $\cos y = -1$, то друге рівняння також є правильною рівністю.

Отже, сторонніх коренів немає.

Відповідь. $(2\pi n; \pi + 2\pi k)$, $n \in Z$, $k \in Z$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Два генератори створюють гармонічні коливання з однаковими частотами, але з різними фазами, які описуються рівняннями $f_1(t)=\sin(80\pi t+\alpha)$ і $f_2(t)=\sin(80\pi t+\beta)$, де $f_1(t)$ і $f_2(t)$ — функції гармонічних коливань (у нанометрах, 10^{-9} м), t — час (у секундах), α і β — фази коливань. Якими мають бути фази цих коливань, щоб у момент часу $t=\frac{1}{80}$ с від початку коливання сума зміщень дорівнювала б 1 нм, а в момент часу $t=\frac{1}{160}$ с — становила би $\sqrt{3}$ нм?

Розв'язання. Розглянемо гармонічне коливання:

$f(t)=f_1(t)+f_2(t)=\sin(80\pi t+\alpha)+\sin(80\pi t+\beta)$.

За умовою, $f\left(\frac{1}{80}\right)=1$, $f\left(\frac{1}{160}\right)=\sqrt{3}$, тобто

$\sin(\pi+\alpha)+\sin(\pi+\beta)=1$ і $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\sqrt{3}$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=-1,\\ \cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}.\end{cases}$

Використаємо формули суми синусів та суми косинусів: $\begin{cases}2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-1,\\ 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{3}.\end{cases}$

Поділимо перше рівняння на друге:

$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; $\alpha=-\frac{\pi}{3}-\beta+2\pi n$, $n\in Z$.

Тоді із першого рівняння системи:

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\beta+2\pi n\right)+\sin\beta=-1$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)-\sin\beta=1$.

Запишемо різницю синусів як добуток виразів:

$2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)=1$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)=1$, $\frac{\pi}{6}+\beta=2\pi k$, $k\in Z$; $\beta=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

Оскільки $\alpha=-\frac{\pi}{3}-\beta+2\pi n$, $n\in Z$, то: $\alpha=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-2\pi k+2\pi n$, $k\in Z$, $n\in Z$,

$\alpha=-\frac{\pi}{6}+2\pi(n-k)$, $k\in Z$, $n\in Z$.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi(n-k);\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (5–10 хв)

Рівень A

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos(x+y)=0, \\ \cos(x-y)=1. \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin^2 x=\cos x\cos y, \\ \cos^2 x=\sin y\sin x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x=\cos x\sin y, \\ \cos^2 x=\sin x\cos y. \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\cos x=1+\cos y, \\ 2\sin x=\sin y. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x\sin y=\dfrac{1}{4}, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2}, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x-\sin y=1, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x\cos y=\dfrac{1}{2}, \\ \cos x\sin y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x\sin y=\dfrac{1}{4}, \\ \cos x\cos y=\dfrac{3}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x\sin y=\dfrac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=3. \end{cases}$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}=\dfrac{1}{9}, \\ \sin x\sin y=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x\cos y=0{,}36, \\ \sin x\sin y=0{,}36. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x\cos y=\dfrac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos(x+y)=0, \\ 3\sin x=2\sin y. \end{cases}$

Рівень B

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin y, \\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=\cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sqrt{2}, \\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{5}\cos y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y, \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}25, \\ \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 0{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{y-x}{2} = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x \cos y = -\dfrac{1}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \sin x = \cos 2y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + \sin(x+y) = 1{,}5, \\ 3x - \sin(x+y) = 2{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos(x-y) - 2y = -1{,}5, \\ 3\cos(x-y) + y = 2{,}5. \end{cases}$

Рівень С

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos(x-2y) = a\cos^3 y, \\ \sin(x-2y) = a\cos^3 y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin^3 x = \dfrac{1}{2}\sin y, \\ \cos^3 x = \dfrac{1}{2}\cos y. \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos^2 y + 3\sin x \sin y = 0, \\ 21\cos 2x - \cos 2y = 10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}. \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg}\left(3y - 5\cos^2 x\right) = 1, \\ 3y - 10\cos^2 x = \dfrac{\pi}{4} - 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(2y - \cos^2 x\right) = 1, \\ 6y - 15\cos^2 x = \dfrac{3}{4}\pi - 1. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3\sin 2x - 2\sin 2y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x + \cos x = 2 + \sin y + \cos y, \\ 2\sin 2x + \sin 2y = 1. \end{cases}$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin^2(-2x) + (3-\sqrt{2})\operatorname{tg}(5y) = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2(5y) + (3-\sqrt{2})\sin(-2x) = \dfrac{1}{2}(3\sqrt{2}-1); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos^2(4x) + \dfrac{\sqrt{26}-2}{2}\operatorname{tg}(-2y) = \dfrac{\sqrt{26}-1}{4}, \\ \operatorname{tg}^2(-2y) - \dfrac{\sqrt{26}-2}{2}\cos(4x) = \dfrac{\sqrt{26}-1}{4}. \end{cases}$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin^2(3x) + (4-\sqrt{3})\operatorname{ctg}(-7y) = 2\sqrt{3} - 0{,}75, \\ \operatorname{ctg}^2(-7y) + (4-\sqrt{3})\sin(3x) = 2\sqrt{3} - 0{,}75; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos^2(6x) + (\sqrt{5}-1)\operatorname{ctg}(-9y) = \dfrac{1}{4}(2\sqrt{5}-1), \\ \operatorname{ctg}^2(-9y) + (\sqrt{5}-1)\cos(6x) = \dfrac{1}{4}(2\sqrt{5}-1). \end{cases}$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1}{\sqrt{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ \cos^2 x + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg} y - 1 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y + 0{,}25}{\sqrt{\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)}} = 0, \\ 4\cos^2 x + \operatorname{tg} y - 1 = 0. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \operatorname{ctg}^4 2x + 32\sin^2 y = 55, \\ \dfrac{1}{\sin^2 2x} - 4\cos y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \left|\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \sin y - \cos y, \\ \sin 2y + 2\sin 2x = \dfrac{3}{4} + 2\sin^3 2x. \end{cases}$

IX. Рефлексія

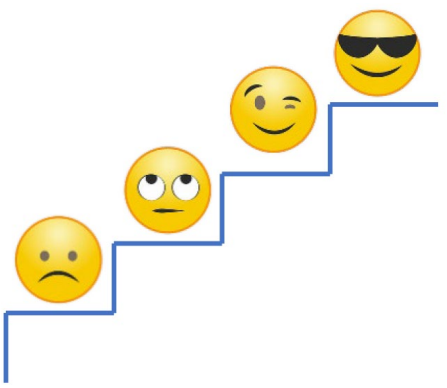
Зобразіть сходи успіху і позначте свій рівень розуміння теми уроку.

1 сходинка — «Мені складно, потрібно ще попрацювати».

2 сходинка — «Я щось зрозумів/зрозуміла, але ще маю запитання».

3 сходинка — «Можу розв'язувати завдання самостійно».

4 сходинка — «Можу пояснити завдання іншим».



Можливі теми учнівських проєктів

1. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь із параметром.
2. Застосування симетрії тригонометричних функцій при розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь.
3. Застосування обернених тригонометричних функцій при розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь.
4. Використання методу мажоранти (міноранти) для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.
5. Системи тригонометричних рівнянь в астрономії.