11

Тема 4. Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 4. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) розглянете графічний метод розв'язування рівняння tg $x = a$;

2) вивчите означення арктангенса;

3) вивчите загальну формулу для розв'язування рівняння tg $x = a$;

4) розглянете графічний метод розв'язування рівняння ctg $x = a$;

5) вивчите означення арккотангенса;

6) вивчите загальну формулу для розв'язування рівняння ctg $x = a$;

7) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення (2–3 хв)

1. Укажіть нулі функції $y = \operatorname{ctg} x$.

2. Для яких кутів функція $y = \operatorname{tg} x$ набуває значення $\sqrt{3}$?

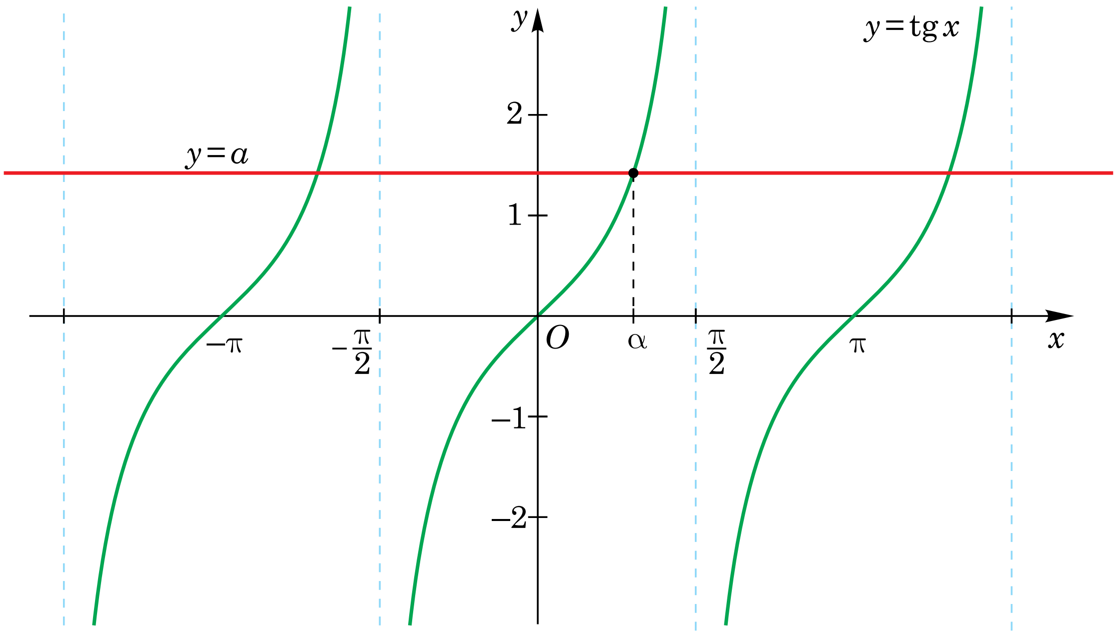
3. Спростіть вираз $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

4. Обчисліть: $8\sin^2 20° + 8\cos^2 70°$.

5. Спростіть за формулою зведення $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

III. Графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = a$ (див. рисунок).

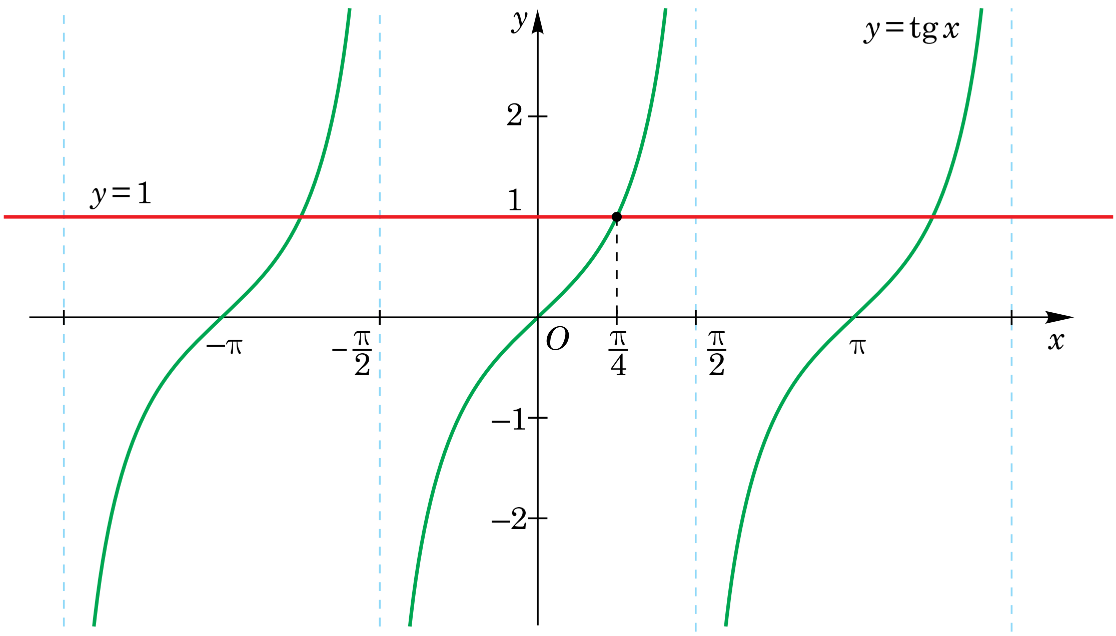


На проміжку $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ графіки завжди мають єдину точку перетину.

Якщо α — кут, що відповідає цій точці, то враховуючи, що π — головний період тангенса, можна зробити висновок, що усі розв'язки рівняння матимуть вигляд $x = \alpha + \pi n$, $n \in Z$.

Приклад 1. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{tg} x = 1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = 1$ (див. рисунок).



Одним із кутів, тангенс якого дорівнює 1, є кут $\frac{\pi}{4}$. Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є періодичною із головним періодом π, то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

IV. Означення арктангенса числа a

Кут $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа a називають такий кут α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.

Основні властивості арктангенса.

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арктангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.
3. $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Приклад 2. Обчисліть $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

V. Формула коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Множину коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ можна записати у вигляді:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x = 1$.

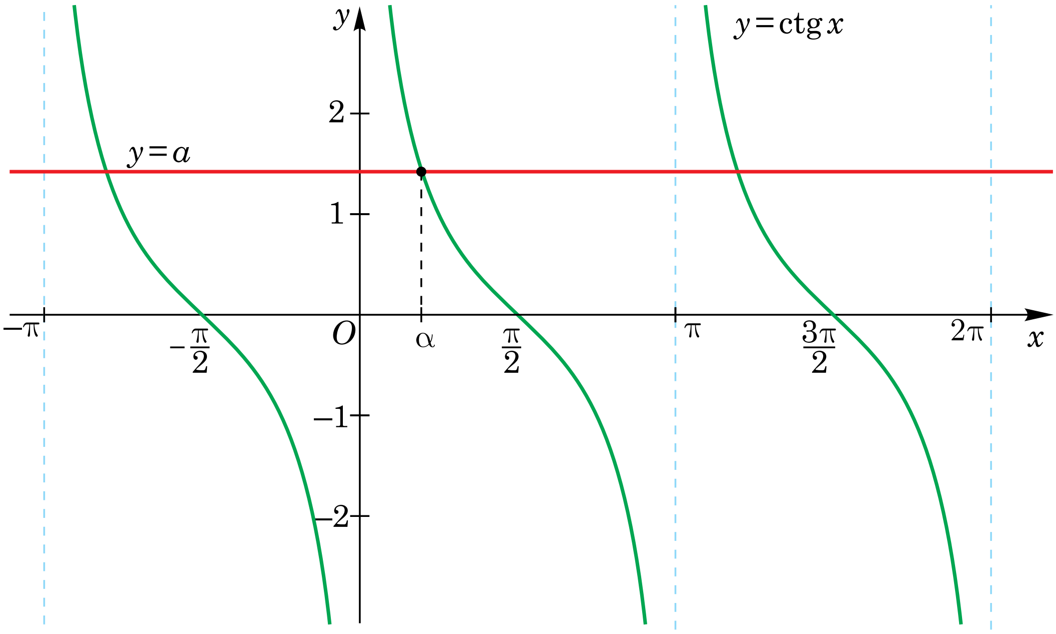
Розв'язання. $\operatorname{tg} 2x = 1$, $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$, $n \in Z$,

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

VI. Графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ та $y = a$ (див. рисунок).

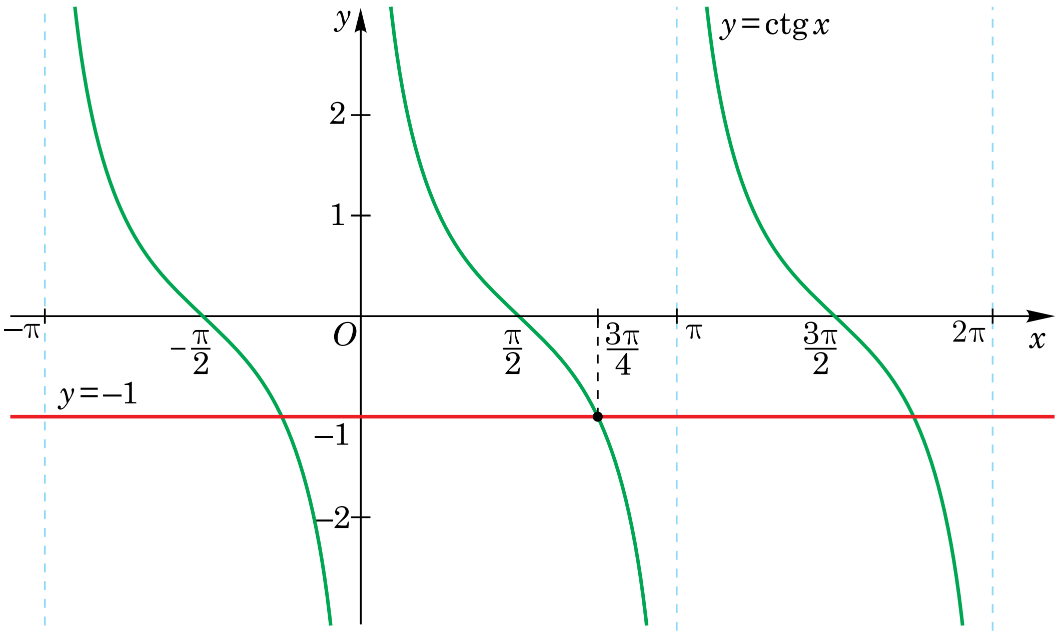


На проміжку $x \in (0;\ \pi)$ графіки мають єдину точку перетину.

Якщо α — кут, що відповідає цій точці, то враховуючи, що π — головний період котангенса, можна зробити висновок, що усі розв'язки рівняння матимуть вигляд $x = \alpha + \pi n$, $n \in Z$.

Приклад 4. Розв'яжіть графічно рівняння $\mathrm{ctg}\, x = -1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \mathrm{ctg}\, x$ та $y = -1$ (див. рисунок).



Одним із кутів, котангенс якого дорівнює −1, є кут $\frac{3\pi}{4}$.

Оскільки функція $y = \mathrm{ctg}\, x$ є періодичною із головним періодом π, то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

VII. Означення арккотангенса числа a

Кут $\alpha \in (0; \pi)$ має спеціальну назву — арккотангенс.

> ***Означення. Арккотангенсом числа a*** називають такий кут α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a.

Основні властивості арктангенса

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арккотангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$.
3. $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Приклад 5. Обчисліть $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $0 < \frac{\pi}{3} < \pi$ і $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{3}$.

VIII. Формула коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Таким чином, розв'язки рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ можна записати у такому вигляді:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = 1$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = 1$, $n \in Z$, $\frac{x}{3} = \operatorname{arcctg} 1 + \pi n$, $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$,

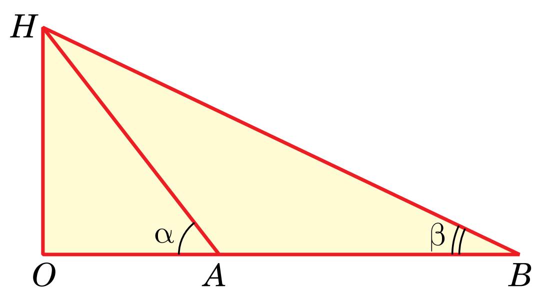
$x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in Z$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in Z$.

IX. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Спостерігач, який перебуває в точці A, бачить дерево, зображене відрізком OH, яке росте вертикально, під кутом α (див. рисунок). Спостерігач, що перебуває в точці B, — під кутом β. Знайдіть, чому дорівнює кут β, якщо відомо, що $\alpha = \frac{\pi}{3}$ і $AB = 2OA$.



X. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)$;
2) $\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;
3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arctg}0$;
5) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$;
6) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
7) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}1)$;
8) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\sqrt{3})$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$;
2) $\operatorname{tg}x=-1$;
3) $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$;
5) $\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;
6) $\operatorname{ctg}x=1$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}2x=0$;
2) $1+\operatorname{tg}\frac{x}{3}=0$;
3) $\operatorname{tg}3x=0$;
4) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{6}=0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{2}$;
2) $\operatorname{ctg}x=0{,}2$;
3) $\operatorname{ctg}x=3$;
4) $\operatorname{tg}x=-5$;
5) $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{9}$;
6) $\operatorname{tg}x=7$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(2x-1)=-\frac{1}{3}$;
2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+1\right)=0{,}5$;
3) $\operatorname{ctg}3x=4$;
4) $\operatorname{tg}5x=-5$;
5) $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{8}$;
6) $\operatorname{tg}\left(0{,}1x-\frac{\pi}{3}\right)=7$.

6. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg}3x=1$ належать проміжку $[0;\pi]$?

7. Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$?

8. Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$, які належать проміжку $[-2\pi;\pi]$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $3\operatorname{arcctg}\sqrt{3}-4\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
2) $2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcctg}1$;
3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arcctg}(-1)$;
4) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $2-\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$; 2) $1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=0$; 3) $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $6\operatorname{ctg}\left(1-\frac{x}{4}\right)-7=0$; 6) $5\operatorname{ctg}\left(1+\frac{x}{3}\right)+6=0$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}=0$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{\sqrt{x}}=1$; 3) $\operatorname{tg}(\pi\cos x)=\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5x}=1$; 5) $\operatorname{tg}\frac{3}{\sqrt{x}}=-1$; 6) $\operatorname{ctg}(\pi\sin x)=1$.

4. Знайдіть усі корені рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{tg}3x=3,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\operatorname{ctg}2x=-2,\ x\in[0;\ \pi]$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})=0$; 2) $(\operatorname{tg}x-4{,}5)(1+2\sin x)=0$;

3) $(\sqrt{3}\operatorname{ctg}x+1)(\operatorname{ctg}x-\sqrt{3})=0$; 4) $(\operatorname{ctg}x+4)\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-1\right)=0$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg}x-5)(\operatorname{ctg}x+\sqrt{3})=0$; 2) $(\operatorname{ctg}x+3)(\operatorname{tg}x+1)=0$;

3) $(\operatorname{ctg}x-\sqrt{3})\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{12}+1\right)=0$; 4) $\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{6}+1\right)(\operatorname{tg}x-1)=0$;

5) $\left(2\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right)(2\operatorname{ctg}x+1)=0$; 6) $\left(1-\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right)(1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}x)=0$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}3x$; 2) $\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}3x$; 3) $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}5x$; 4) $\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}5x$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^2 x=3$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{3}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi x^2}{1+x^2}=0$; 1) $\operatorname{ctg}\frac{\pi x^2}{1+x^2}=1$.

2. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\frac{\operatorname{tg}x-a}{\operatorname{ctg}x+3}=0$?

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(0{,}5x)\cdot\sqrt{9-4x^2}=0$; 2) $\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{1-|x|}=0$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)(\operatorname{ctg}x-\sqrt{3})=0$ на проміжку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?

5. При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)(\operatorname{tg} x-1)=0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(3\operatorname{tg} 2\pi x)=-1$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right)=\sqrt{3}$.

7. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше чотирьох коренів рівняння $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$?

8. Розв'яжіть рівняння $|\operatorname{ctg} x|=\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}$.

Рефлексія

1. Я розумію графічний метод розв'язування рівняння tg $x = a$.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я знаю означення арктангенса.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я знаю загальну формулу коренів рівняння tg $x = a$.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я розумію графічний метод розв'язування рівняння ctg $x = a$.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я знаю означення арккотангенса.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я знаю загальну формулу коренів рівняння ctg $x = a$.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

7. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми проєктів

1. Геометричні інтерпретації рівнянь tg $x = a$ та ctg $x = a$.
2. Практичне застосування рівнянь tg $x = a$ та ctg $x = a$ у фізиці, в геометрії, у техніці.
3. Історичний огляд розв'язування рівнянь tg $x = a$ та ctg $x = a$ у математиці та в астрономії.

4. Створення калькулятора для розв'язування рівнянь tg $x = a$ та ctg $x = a$ будь-якою мовою програмування.
5. Розв'язування найпростіших рівнянь виду arctg $x = a$ і arcctg $x = a$.