

11

Тема 4. Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 4. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

План уроку

1. Графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$.
2. Означення арктангенса числа a .
3. Формула коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$.
4. Графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.
5. Означення арккотангенса числа a .
6. Формула коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає дані, потрібні для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 1.2.3-1];

планує дії та співпрацює у групі для розв'язання комплексних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.3-1];

самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в комплексній проблемній ситуації та їхню вірогідність [12 МАО 3.1.1-1];

визначає можливості застосування відомих математичних фактів і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи існують такі значення a , для яких рівняння $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$ не мають розв'язків?
- 2) Чи можна звести рівняння $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$ одне до одного?
- 3) Чи можна використати тангенс або котангенс для визначення кута підйому літака чи кута спостереження об'єкта на відстані?
- 4) Чи допомагають графіки функцій при знаходженні кількості коренів рівняння?
- 5) Для рівнянь $\cos x = a$ та $\sin x = a$ ми вводили поняття арккосинуса та арксинуса. Чи існують подібні поняття для рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$?

II. Повторення (2–3 хв)

1. Укажіть нулі функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2. Для яких кутів функція $y = \operatorname{tg} x$ набуває значення $\sqrt{3}$?

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Спростіть вираз $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

Відповідь. $\operatorname{tg}^2 \alpha$.

4. Обчисліть: $8 \sin^2 20^\circ + 8 \cos^2 70^\circ$.

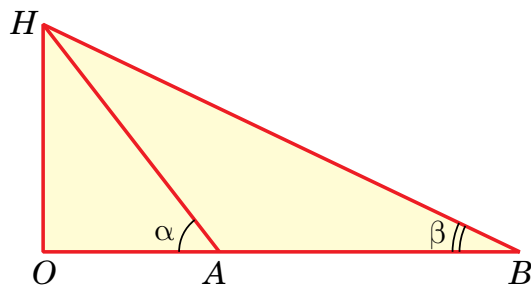
Відповідь. 8.

5. Спростіть за формулою зведення $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

Відповідь. $-\operatorname{ctg} \alpha$.

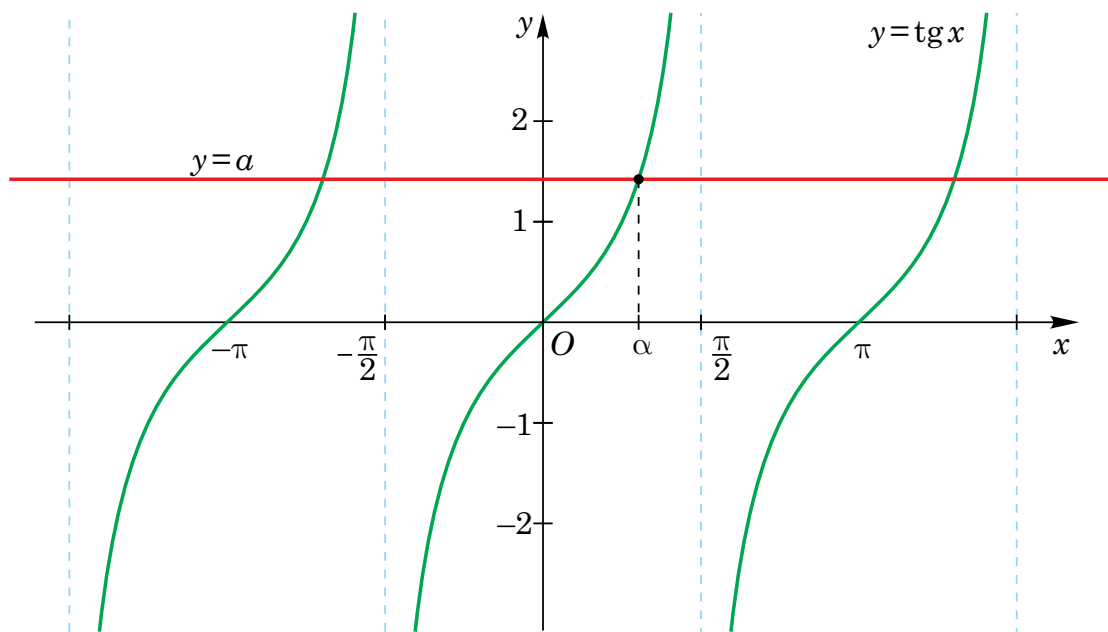
Як я вирішую певну проблему?

Задача. Спостерігач, який перебуває в точці A , бачить дерево, зображене відрізком OH , яке росте вертикально, під кутом α (див. рисунок). Спостерігач, що перебуває в точці B , — під кутом β . Знайдіть, чому дорівнює кут β , якщо відомо, що $\alpha = \frac{\pi}{3}$ і $AB = 2OA$.



III. Графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ (5 хв)

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = a$ (див. рисунок).



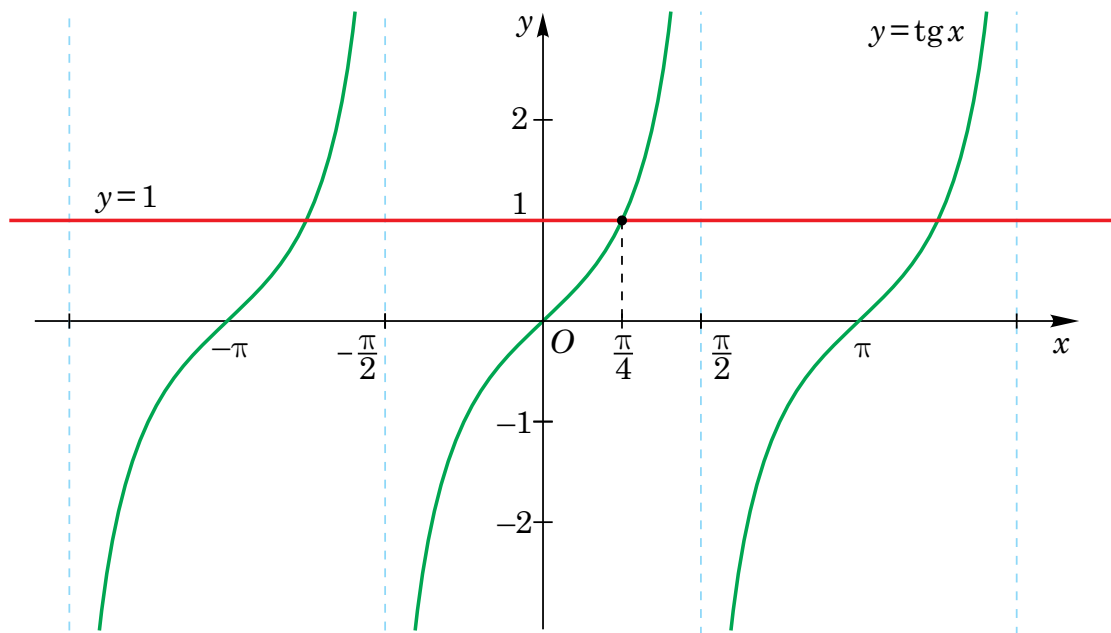
На проміжку $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ графіки завжди мають єдину точку перетину.

Якщо α — кут, що відповідає цій точці, то враховуючи, що π — головний період тангенса, можна зробити висновок, що усі розв'язки рівняння матимуть вигляд $x = \alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади (3 хв)

6. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{tg} x = 1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = 1$ (див. рисунок).

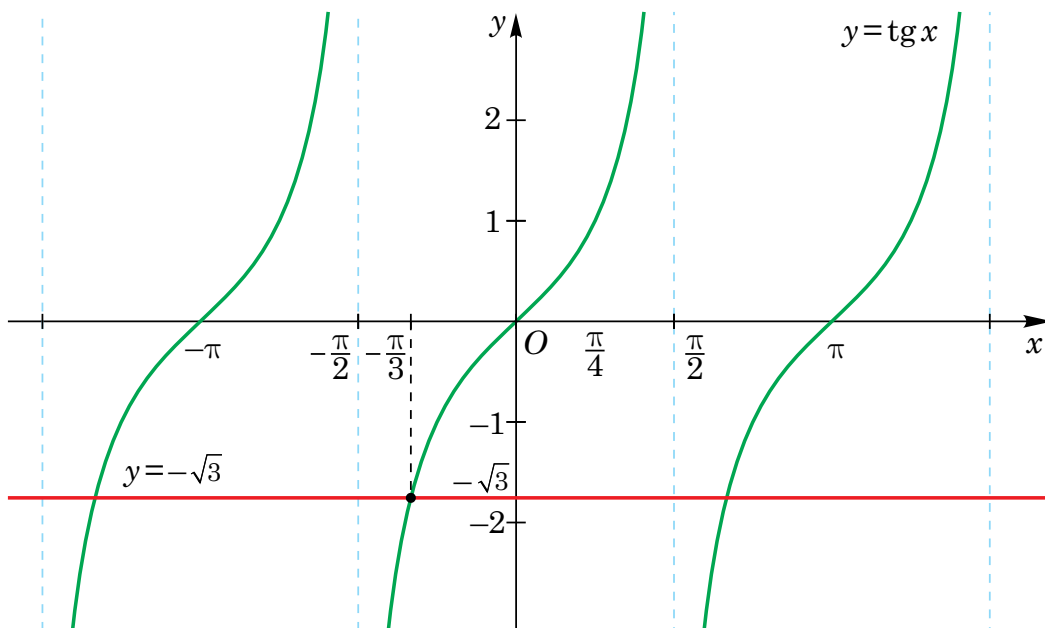


Одним із кутів, тангенс якого дорівнює 1, є кут $\frac{\pi}{4}$. Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є періодичною із головним періодом π , то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = -\sqrt{3}$ (див. рисунок).



Одним із кутів, тангенс якого дорівнює $-\sqrt{3}$, є кут $-\frac{\pi}{3}$. Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є періодичною із головним періодом π , то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

IV. Означення арктангенса числа a

Кут $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа a називають такий кут α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса.

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арктангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.
3. $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

8. Обчисліть $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

9. Обчисліть $\operatorname{arctg}(-1)$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$, оскільки $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}$.

V. Формула коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Множину коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ можна записати у вигляді:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ілюстративні приклади (4–5 хв)

10. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x = 1$.

Розв'язання. $\operatorname{tg} 2x = 1$, $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

11. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ непарна, то:

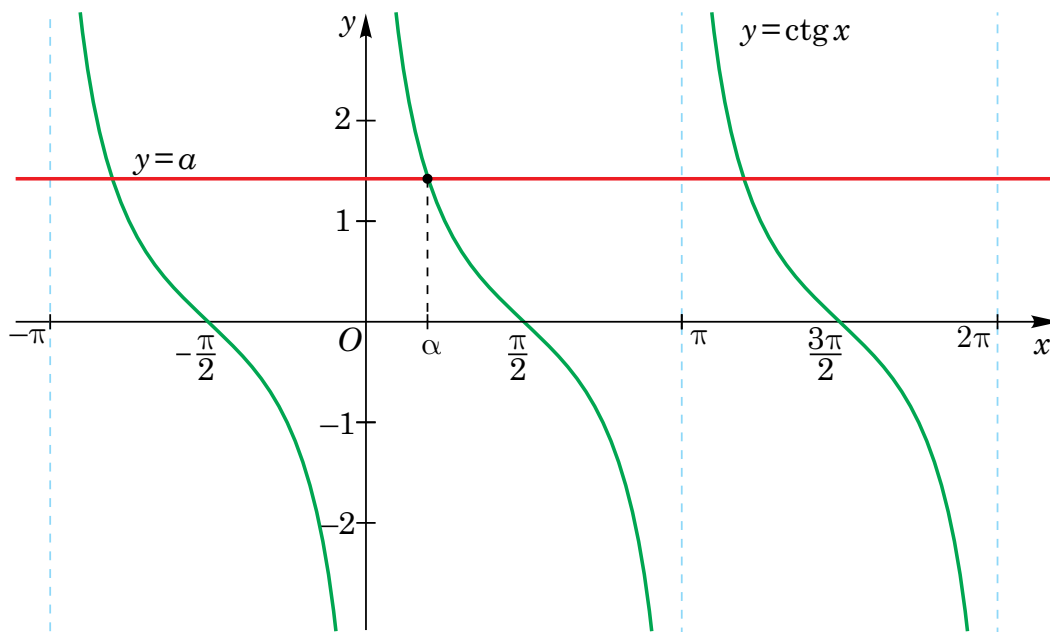
$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{x}{3} - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{3} = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = 3\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

VI. Графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ (5 хв)

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ та $y = a$ (див. рисунок).



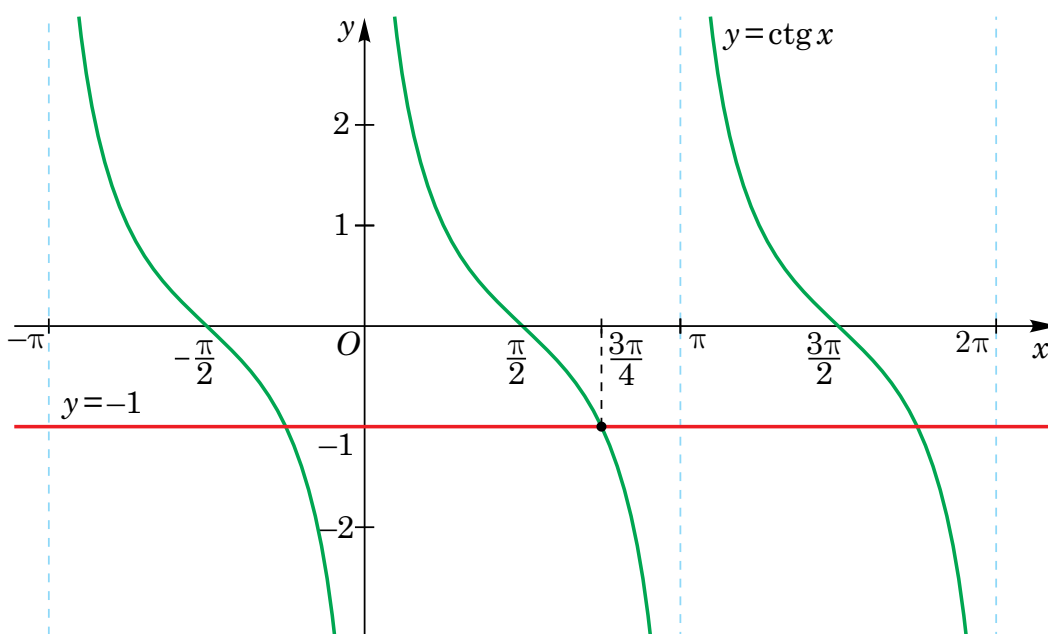
На проміжку $x \in (0; \pi)$ графіки мають єдину точку перетину.

Якщо α — кут, що відповідає цій точці, то враховуючи, що π — головний період котангенса, можна зробити висновок, що усі розв'язки рівняння матимуть вигляд $x = \alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади (3 хв)

12. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{ctg} x = -1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ та $y = -1$ (див. рисунок).



Одним із кутів, котангенс якого дорівнює -1 , є кут $\frac{3\pi}{4}$.

Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є періодичною із головним періодом π , то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

VII. Означення арккотангенса числа a

Кут $\alpha \in (0; \pi)$ має спеціальну назву — арккотангенс.

Означення. Арккотангенсом числа a називають такий кут α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арккотангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} a) = a$.
3. $\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

13. Обчисліть $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $0 < \frac{\pi}{3} < \pi$ і $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{3}$.

14. Обчисліть $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,

оскільки $0 < \frac{5\pi}{6} < \pi$ і $\operatorname{ctg} \left(\frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3}$.

Відповідь. $\frac{5\pi}{6}$.

VIII. Формула коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Таким чином, розв'язки рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ можна записати у такому вигляді:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

15. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 1$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 1, n \in \mathbb{Z}, \frac{x}{3} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$,

$$x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

16. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} - 4x \right) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \operatorname{ctg} x$ непарна, то:

$$\operatorname{ctg} \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) = -\sqrt{3}, 4x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$4x - \frac{\pi}{3} = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, 4x = \frac{7\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

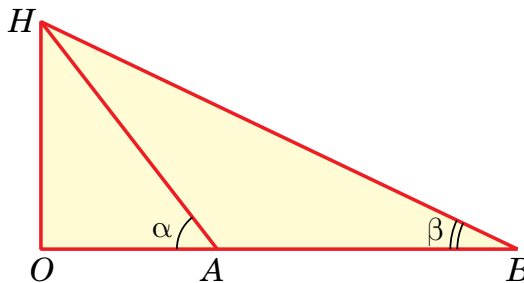
$$x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

IX. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Спостерігач, який перебуває в точці A , бачить дерево, зображене відрізком OH , яке росте вертикально, під кутом α (див. рисунок). Спостерігач, що перебуває в точці B , — під кутом β . Знайдіть, чому дорівнює кут β , якщо відомо, що $\alpha = \frac{\pi}{3}$ і $AB = 2OA$.



Розв'язання.

1) Розглянемо трикутник AOH : $\frac{OH}{OA} = \operatorname{tg} \alpha$, звідки $OH = OA \operatorname{tg} \alpha$.

2) Розглянемо трикутник BOH : $\frac{OH}{OA + AB} = \operatorname{tg} \beta$, $\frac{OA \operatorname{tg} \alpha}{OA + AB} = \operatorname{tg} \beta$,

$$OA \cdot \operatorname{tg} \alpha = OA \cdot \operatorname{tg} \beta + AB \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad AB \operatorname{tg} \beta = OA(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta), \quad \frac{AB}{OA} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta}.$$

3) Оскільки $AB = 2OA$, то $2 = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta}$, $2 \operatorname{tg} \beta = \sqrt{3} - \operatorname{tg} \beta$, $3 \operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\beta = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\beta = \frac{\pi}{6}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

X. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$;

2) $\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \operatorname{arctg} 0$;

5) $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3})$;

6) $\operatorname{arccctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$;

7) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} 1)$;

8) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} \sqrt{3})$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\operatorname{tg} x = -1$;

3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

5) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

6) $\operatorname{ctg} x = 1$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 2x = 0$;

2) $1 + \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$;

3) $\operatorname{tg} 3x = 0$;

4) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{6} = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$;

2) $\operatorname{ctg} x = 0,2$;

3) $\operatorname{ctg} x = 3$;

4) $\operatorname{tg} x = -5$;

5) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{9}$;

6) $\operatorname{tg} x = 7$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(2x - 1) = -\frac{1}{3}$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 0,5$;

3) $\operatorname{ctg} 3x = 4$;

4) $\operatorname{tg} 5x = -5$;

5) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$;

6) $\operatorname{tg}\left(0,1x - \frac{\pi}{3}\right) = 7$.

6. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 3x = 1$ належать проміжку $[0; \pi]$?

7. Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

8. Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$, які належать проміжку $[-2\pi; \pi]$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 4 \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $2 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 1$;

3) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}(-1)$;

4) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 - \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

2) $1 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$;

3) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

5) $6 \operatorname{ctg}\left(1 - \frac{x}{4}\right) - 7 = 0$;

6) $5 \operatorname{ctg}\left(1 + \frac{x}{3}\right) + 6 = 0$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x} = 0$;

2) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = 1$;

3) $\operatorname{tg}(\pi \cos x) = \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5x} = 1$;

5) $\operatorname{tg} \frac{3}{\sqrt{x}} = -1$;

6) $\operatorname{ctg}(\pi \sin x) = 1$.

4. Знайдіть усі корені рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{tg} 3x = 3, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $\operatorname{ctg} 2x = -2, x \in [0; \pi]$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$;

2) $(\operatorname{tg} x - 4,5)(1 + 2 \sin x) = 0$;

3) $(\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$;

4) $(\operatorname{ctg} x + 4)\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1\right) = 0$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x - 5)(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) = 0$;

2) $(\operatorname{ctg} x + 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$;

3) $(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3})\left(2\operatorname{tg} \frac{x}{12} + 1\right) = 0$;

4) $\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$;

5) $\left(2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2\operatorname{ctg} x + 1) = 0$;

6) $\left(1 - \sqrt{2}\operatorname{tg} \frac{x}{4}\right)(1 + \sqrt{3}\operatorname{ctg} x) = 0$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$;

2) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 3x$;

3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 5x$;

4) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 5x$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^2 x = 3$;

2) $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 0$;

1) $\operatorname{ctg} \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 1$.

2. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\frac{\operatorname{tg} x - a}{\operatorname{ctg} x + 3} = 0$?

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(0,5x) \cdot \sqrt{9-4x^2} = 0$;

2) $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{1-|x|} = 0$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?

5. При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(3\operatorname{tg} 2\pi x) = -1$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$.

7. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше чотирьох коренів рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

8. Розв'яжіть рівняння $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}$.

XI. Рефлексія (2 хв)

1. Я розумію графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | | |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|------------------------|----|
| 2. | Я знаю означення арктангенса. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю загальну формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{ctg} x = a$. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю означення арккотангенса. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю загальну формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми учнівських проєктів

- 1.** Геометричні інтерпретації рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$.
- 2.** Практичне застосування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$ у фізиці, в геометрії, у техніці.
- 3.** Історичний огляд розв'язування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$ у математиці та в астрономії.
- 4.** Створення калькулятора для розв'язування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$ будь-якою мовою програмування.
- 5.** Розв'язування найпростіших рівнянь виду $\operatorname{arctg} x = a$ і $\operatorname{arcctg} x = a$.