

11

Тема 5.

Координати, вектори та геометричні фігури у тривимірному просторі

Урок 5*. Векторний та векторно-координатний
методи розв'язування стереометричних задач

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) визначати, чи є вектори компланарними або некомпланарними;
- 2) розкласти вектор за трьома некомпланарними векторами;
- 3) перевіряти, чи лежать три точки на одній прямій, за допомогою векторів;
- 4) перевіряти належність чотирьох точок одній площині;
- 5) розв'язувати задачі практичного характеру.

II. Повторення

1. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}(2; -1; 3)$ і $\vec{b}(-1; 4; 0)$.
2. Обчисліть скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$.
3. Якщо вектори $\vec{a}(3; -1; 2)$ і $\vec{b}(1; x; 1)$ — перпендикулярні, то $x = \dots$.
4. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x + 5y = 5, \\ x - 2y = 7. \end{cases}$$

III. Компланарні та некопланарні вектори

Означення. Три вектори називають **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині (або в паралельних площинах). Це означає, що один із векторів можна подати як комбінацію двох інших векторів.

Некомпланарні вектори — це вектори, які не лежать в одній площині.

Умова компланарності трьох векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ визначається векторною рівністю: $\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{AC} + \mu \cdot \vec{AD}$, де λ і μ є деякими числами.

Розклад вектора за трьома некопланарними векторами

Теорема. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некопланарні, тобто не лежать в одній площині, то будь-який інший вектор $\vec{d}$ простору можна подати, як їхню лінійну комбінацію: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, де α , β , γ — деякі числа. Такий розклад — єдиний.

Алгоритм розкладу вектора $\vec{d}$ за трьома некопланарними векторами

1. Нехай $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, $\vec{d}(d_1; d_2; d_3)$.
2. Складаємо систему для кожної координати вектора $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$:
$$\begin{cases} d_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1, \\ d_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2, \\ d_3 = \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3. \end{cases}$$
3. Розв'язуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих чисел α , β , γ .
4. Якщо числа α , β , γ існують, то вектор $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ — розкладено за трьома некопланарними векторами.

Приклад 1. Знайдіть розклад вектора $\vec{d}(4; 2; 3)$ за векторами $\vec{a}(1; 0; 1)$, $\vec{b}(0; 1; 1)$, $\vec{c}(1; 1; 0)$, які лежать в різних площинах.

Розв'язання. Для координат вектора $\vec{d}$ запишемо рівність:

$$(4; 2; 3) = \alpha(1; 0; 1) + \beta(0; 1; 1) + \gamma(1; 1; 0),$$

де α , β , γ — деякі числа.

Для кожної координати вектора $\vec{d}$ складемо лінійне рівняння:

$$\begin{cases} 4 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1, \\ 2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1, \\ 3 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0; \end{cases} \begin{cases} 4 = \alpha + \gamma, \\ 2 = \beta + \gamma, \\ 3 = \alpha + \beta; \end{cases} \begin{cases} \alpha = 2,5, \\ \beta = 0,5, \\ \gamma = 1,5. \end{cases}$$

Отже, $\vec{d} = 2,5\vec{a} + 0,5\vec{b} + 1,5\vec{c}$.

Відповідь. $\vec{d} = 2,5\vec{a} + 0,5\vec{b} + 1,5\vec{c}$.

Розклад вектора за одиничними координатними векторами або ортами

Означення. *Одиничні вектори* $\vec{e}_1(1; 0; 0)$, $\vec{e}_2(0; 1; 0)$, $\vec{e}_3(0; 0; 1)$ — це вектори, співнаправлені з осями координат, які ще називають *координатними векторами*, або *ортами*.

Теорема. Будь-який вектор $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ можна подати у вигляді $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, тобто розкласти за одиничними векторами (ортами).

Наприклад, для вектора $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

IV. Векторна умова приналежності трьох точок до однієї прямої

Три точки A, B, C лежать на одній прямій, якщо вектори, побудовані з однієї з точок, до двох інших, — колінеарні.

Нехай задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$.

Із точки A побудуємо вектори:

$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$.

Тоді, існує число t таке, що $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$.

Це рівносильно системі трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = t(x_3 - x_1), \\ y_2 - y_1 = t(y_3 - y_1), \\ z_2 - z_1 = t(z_3 - z_1). \end{cases}$$

Із системи маємо пропорційні відношення: $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$, яке є умовою колінеарності векторів.

V. Векторна умова приналежності чотирьох точок до однієї площини

Чотири точки A, B, C, D лежать в одній площині тоді й тільки тоді, коли три вектори, проведені з однієї точки до інших трьох точок, лежать в одній площині.

Наприклад, виберемо точку A , як початок векторів, і побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

Теорема. Якщо вектор $\overrightarrow{AD}$ компланарний із векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, то точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Це означає, що $\overrightarrow{AD}$ можна подати як лінійну комбінацію двох інших векторів:

$$\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}.$$

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Археологи досліджують територію між трьома курганами в степу. Вони розмістили маркери в точках $A(0; 0; 0)$, $C(6; 9; 3)$, які відповідають двом курганам, і в точці $B(2; 3; 1)$, яка відповідає третьому кургану. В точці B археологи встановили вертикальну жердину, щоб визначати напрямок сліду від тіні в момент спостереження, який відповідає полудню. Археологам потрібно встановити, чи лежать три кургани на одній прямій.

1) З'ясуйте, чи пряма AC , вздовж якої падає тінь, проходить через точку B .

2) Чи відповідає напрямок тіні положенню Сонця, яке було визначене під час вимірювання в полудень?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть координати вектора:

1) $4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$; 2) $-2\vec{e}_1 - 7,65\vec{e}_2 + \vec{e}_3$; 3) $\frac{3}{7}\vec{e}_1 - \sqrt{2}\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$; 4) $0\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2 + \frac{1}{9}\vec{e}_3$.

2. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій:

1) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 4; 6)$, $C(1; 2; 3)$; 2) $A(1; -1; 3)$, $B(2; -2; 6)$, $C(3; -3; 9)$;
3) $A(2; 5; 11)$, $B(-3; 4; 0,5)$, $C(3; 4; 5)$; 4) $A(1; 1; 1)$, $B(2; 2; 2)$, $C(3; 3; 3)$?

3. Чи належать точки одній площині:

1) $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(1; 1; 0)$;
2) $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 2)$, $C(0; 3; 2)$, $D(-1; 4; 2)$;
3) $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(0; 1; 1)$, $D(1; 1; 2)$;
4) $A(2; 3; 1)$, $B(3; 4; 2)$, $C(4; 5; 3)$, $D(5; 6; 4)$?

4. Розкладіть за ортами вектор:

1) $\vec{a}(-2; 5; 0)$; 2) $\vec{b}\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{5}\right)$; 3) $\vec{c}\left(0; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$; 4) $\vec{d}(6; 0; -1)$.

5. Знайдіть числа a, b і c , якщо:

1) $\vec{m}(-1; 4; 2) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$; 2) $\vec{m}(0; 7; -3) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$;
3) $\vec{m}(5; -2; 1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$; 4) $\vec{m}\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{5}\right) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$.

6. Чи колінеарні вектори $\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a}(1; 0; 2)$, $\vec{b}(2; 1; -1)$, $\vec{c}(7; 3; -1)$;
2) $\vec{a}(3; 4; 5)$, $\vec{b}(-0,5; 0,5; 0)$, $\vec{c}\left(4; \frac{1}{3}; -\frac{6}{2}\right)$?

7. При яких значеннях числа k вектори є колінеарними:

1) $\vec{a}(k; 3; -2)$ і $\vec{b}(-2; -6; -4)$;
2) $\vec{b}(2; 6; 8)$ і $\vec{a}(1; k; 4)$;
3) $\vec{a}(2; -k; 1)$ і $\vec{b}(6; 4; 5)$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо:
- 1) $\vec{a}(1; 2; 0)$, $\vec{b}(0; 1; 1)$, $\vec{c}(1; 3; 1)$;
 - 2) $\vec{a}(-1; -1; -1)$, $\vec{b}(2; 3; 4)$, $\vec{c}(4; 3; 2)$?

Рівень В

1. Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вектор $\vec{d}(4; 2; 3)$, якщо:
 - 1) $\vec{a}(1; 0; 1)$, $\vec{b}(0; 1; 1)$, $\vec{c}(1; 1; 0)$;
 - 2) $\vec{a}(2; 1; 5)$, $\vec{b}(6; 4; 5)$, $\vec{c}(2; 1; 1)$.
2. Чи лежать точки A , B , C на одній прямій, якщо $\vec{OA}(3; -1; 5)$, $\vec{OB}(6; -2; 10)$, $\vec{OC}(9; -3; 15)$?
3. Знайдіть усі значення k , при яких вектори $\vec{a}(k; 3; 2)$, $\vec{b}(4; 6; k)$ є колінеарними.
4. Для яких значень k вектори $\vec{a}(k+2; 1; -3)$, $\vec{b}(5; k; -9)$ лежать на одній прямій?
5. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некопланарні. Доведіть, що компланарними є вектори:
 - 1) $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;
 - 2) $\vec{n} = -\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$;
 - 3) $\vec{n} = 3\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
6. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ — неколінеарні. Знайдіть значення x і y , якщо:
 - 1) вектори $x\vec{a} + y\vec{b}$ і $(x+2)\vec{a} + (y-1)\vec{b}$ — рівні;
 - 2) вектори $2\vec{a} + x\vec{b}$ і $(y-3)\vec{a} + (x+1)\vec{b}$ — рівні.
7. Дано три ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, кожен два з яких, — неколінеарні. Знайдіть суму цих векторів, якщо:
 - 1) вектор $\vec{a} + \vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$;
 - 2) вектор $\vec{a} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{b}$.
8. У місті планують прокласти велосипедну доріжку, яка проходитиме через точки $A(2; 1; 0)$ та $M(6; 3; 0)$. Перевірте, чи лежить на прямій між точками A і M школа, якій відповідає точка $P(4; 2; 0)$.

Рівень С

1. Інженер проектує канатну підвісну систему між двома точками $K(2; 1; 0)$ і $L(6; 5; 4)$. Для встановлення допоміжної опори потрібно знайти координати точки P , яка лежить на прямій KL та розташована на відстані $3\sqrt{6}$ від точки K .
2. Два оператори дронів планують маршрути дронів у вигляді векторних рівностей: перший маршрут $\vec{R}_1 = x\vec{a} + y\vec{b}$ і другий — $\vec{R}_2 = (x+1)\vec{a} + (y-2)\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — фіксовані напрямні вектори. Знайдіть x і y , якщо маршрути дронів збігаються. Поясніть, чому важливо, щоб маршрути векторно збігалися, наприклад, при роботі в обмеженому повітряному просторі.
3. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Перевірте, чи є компланарними трійки векторів:
 - 1) $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{A_1 B_1}$;
 - 2) $\vec{BC}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{BA_1}$;
 - 3) $\vec{AA_1}$, $\vec{AC}$, $\vec{BD_1}$.
4. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доведіть, що вектори $\vec{AB_1}$, $\vec{CD_1}$, $\vec{A_1 C_1}$ — компланарні.

5. Інженер проектує металеву конструкцію, що спирається на три напрямні балки, положення яких визначають вектори $\vec{a}(3; a; 6)$, $\vec{b}(6; 2a; 12)$, $\vec{c}(9; 3a; 18)$. Щоб уникнути перевантаження або перекосів конструкції, усі три вектори мають бути колінеарними. Знайдіть усі значення параметра a , при яких ця умова виконується, та поясніть, що означає колінеарність у даному випадку.
- 6*. Діагоналі паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перетинаються в точці O . Розкладіть вектори $\vec{AC}$ і $\vec{OB_1}$ за базисними векторами $\vec{AA_1}$, $\vec{AB}$, $\vec{AD}$.
- 7*. У трикутній призмі $ABCA_1 B_1 C_1$ діагоналі грані $AC_1 C$ перетинаються в точці K . Розкладіть вектори $\vec{AK}$ і $\vec{A_1 K}$ за векторами $\vec{CB}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{CA}$.
8. $OABC$ — тетраедр. Точка N — середина ребра OC . Точка K — середина ребра AB . Розкладіть вектор $\vec{KN}$ за векторами $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Жахливі										Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми проєктів

1. Компланарні та некомпланарні вектори в навігації дронів.
2. Ортонормований базис у 3D-графіці.
3. Визначення положення точки в просторі за допомогою GPS-навігаторів.
4. Просторові помилки: що відбувається, якщо точки не лежать в одній площині.







