

11

Тема 5.

Координати, вектори та геометричні фігури у тривимірному просторі

Урок 5*. Векторний та векторно-координатний методи розв'язування стереометричних задач

План уроку

1. Компланарні та некомпланарні вектори.
2. Розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами.
3. Розкладання вектора за одиничними координатними векторами (ортами).
4. Векторна умова приналежності трьох точок до однієї прямої.
5. Векторна умова приналежності чотирьох точок до однієї площини.
6. Розв'язування практичних задач.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає дані, потрібні для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 1.2.3-1];

розрізняє форми подачі інформації математичного змісту (текст, графік, аудіо, відео тощо) [12 МАО 2.1.1-1];

досліджує та доводить математичні твердження [12 МАО 4.1.2-2];

самостійно та у співпраці з іншими добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-2];

застосовує визначену послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-3].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової активності наприкінці уроку.

- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1. Як перевірити, чи належать чотири точки одній площині, без побудови рисунка?
2. Як за допомогою векторів визначити, чи належать три точки одній прямій?
3. У чому перевага застосування векторного методу під час розв'язування просторових задач?
4. Як інженери визначають, чи всі вузли каркасної конструкції, наприклад, даху будівлі або мосту, лежать в одній площині?
5. Як у програмуванні тривимірної графіки, наприклад, у відеоіграх визначають, чи правильно розташовані об'єкти на площині?
6. Чому векторний метод є незамінним інструментом у GPS-навігації та в інженерії безпілотних літальних апаратів?

II. Повторення (5 хв)

1. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a} (2; -1; 3)$ і $\vec{b} (-1; 4; 0)$.
Відповідь. -6 .

2. Обчисліть скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$.

Відповідь. 5.

3. Якщо вектори $\vec{a}(3; -1; 2)$ і $\vec{b}(1; x; 1)$ — перпендикулярні, то $x = \dots$.

Відповідь. 5.

4. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x + 5y = 5, \\ x - 2y = 7. \end{cases}$$

Відповідь. (5; -1).

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Археологи досліджують територію між трьома курганами в степу. Вони розмістили маркери в точках $A(0; 0; 0)$, $C(6; 9; 3)$, які відповідають двом курганам, і в точці $B(2; 3; 1)$, яка відповідає третьому кургану. В точці B археологи встановили вертикальну жердину, щоб визначати напрямок сліду від тіні в момент спостереження, який відповідає полудню. Археологам потрібно встановити, чи лежать три кургани на одній прямій.

1) З'ясуйте, чи пряма AC , вздовж якої падає тінь, проходить через точку B .

2) Чи відповідає напрямок тіні положенню Сонця, яке було визначене під час вимірювання в полудень?

III. Компланарні та некомпланарні вектори (5 хв)

Означення. Три вектори називають **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині (або в паралельних площинах). Це означає, що один із векторів можна подати як комбінацію двох інших векторів.

Некомпланарні вектори — це вектори, які не лежать в одній площині.

Умова компланарності трьох векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ визначається векторною рівністю: $\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{AC} + \mu \cdot \vec{AD}$, де λ і μ є деякими числами.

Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами

Теорема. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некомпланарні, тобто не лежать в одній площині, то будь-який інший вектор $\vec{d}$ простору можна подати, як їхню лінійну комбінацію: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, де α , β , γ — деякі числа. Такий розклад — єдиний.

Алгоритм розкладу вектора $\vec{d}$ за трьома некомпланарними векторами

1. Нехай $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, $\vec{d}(d_1; d_2; d_3)$.

2. Складаємо систему для кожної координати вектора $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$:

$$\begin{cases} d_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1, \\ d_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2, \\ d_3 = \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3. \end{cases}$$

3. Розв'язуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих чисел α, β, γ .
4. Якщо числа α, β, γ існують, то вектор $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ — розкладено за трьома некомпланарними векторами.

Ілюстративний приклад

5. Знайдіть розклад вектора $\vec{d}(4; 2; 3)$ за векторами $\vec{a}(1; 0; 1), \vec{b}(0; 1; 1), \vec{c}(1; 1; 0)$, які лежать в різних площинах.

Розв'язання. Для координат вектора $\vec{d}$ запишемо рівність:

$$(4; 2; 3) = \alpha(1; 0; 1) + \beta(0; 1; 1) + \gamma(1; 1; 0),$$

де α, β, γ — деякі числа.

Для кожної координати вектора $\vec{d}$ складемо лінійне рівняння:

$$\begin{cases} 4 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1, \\ 2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1, \\ 3 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = \alpha + \gamma, \\ 2 = \beta + \gamma, \\ 3 = \alpha + \beta; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 2,5, \\ \beta = 0,5, \\ \gamma = 1,5. \end{cases}$$

Отже, $\vec{d} = 2,5\vec{a} + 0,5\vec{b} + 1,5\vec{c}$.

Відповідь. $\vec{d} = 2,5\vec{a} + 0,5\vec{b} + 1,5\vec{c}$.

Розклад вектора за одиничними координатними векторами або ортами

Означення. Одиничні вектори $\vec{e}_1(1; 0; 0), \vec{e}_2(0; 1; 0), \vec{e}_3(0; 0; 1)$ — це вектори, співнаправлені з осями координат, які ще називають *координатними векторами*, або *ортами*.

Теорема. Будь-який вектор $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ можна подати у вигляді $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, тобто розкласти за одиничними векторами (ортами).

Наприклад, для вектора $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

IV. Векторна умова приналежності трьох точок до однієї прямої (5 хв)

Три точки A, B, C лежать на одній прямій, якщо вектори, побудовані з однієї з точок, до двох інших, — колінеарні.

Нехай задано точки $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3)$.

Із точки A побудуємо вектори:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Тоді, існує число t таке, що $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$.

Це рівносильно системі трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = t(x_3 - x_1), \\ y_2 - y_1 = t(y_3 - y_1), \\ z_2 - z_1 = t(z_3 - z_1). \end{cases}$$

Із системи маємо пропорційні відношення: $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$, яке є умовою колінеарності векторів.

V. Векторна умова приналежності чотирьох точок до однієї площини (5 хв)

Чотири точки A, B, C, D лежать в одній площині тоді й тільки тоді, коли три вектори, проведені з однієї точки до інших трьох точок, лежать в одній площині.

Наприклад, виберемо точку A , як початок векторів, і побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

Теорема. Якщо вектор $\overrightarrow{AD}$ компланарний із векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, то точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Це означає, що $\overrightarrow{AD}$ можна подати як лінійну комбінацію двох інших векторів:

$$\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$

Ілюстративний приклад

6. Чи належать точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(2; 1; 1)$, $D(3; 2; 2)$ одній площині?

Розв'язання. 1) Нехай точка A є початком векторів.

Знаходимо координати векторів: $\overrightarrow{AB}(1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC}(2; 1; 1)$, $\overrightarrow{AD}(3; 2; 2)$.

2) Знайдемо числа λ, μ із рівності: $\overrightarrow{(3; 2; 2)} = \lambda \cdot \overrightarrow{(1; 1; 0)} + \mu \cdot \overrightarrow{(2; 1; 1)}$.

$$\text{Складаємо систему: } \begin{cases} 3 = \lambda + 2\mu, \\ 2 = \lambda + \mu, \\ 2 = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu. \end{cases}$$

Звідси, $\mu = 2$, $\lambda = 0$.

Перевіримо виконання першої рівності системи:

$$3 = 0 + 2 \cdot 2 = 4 \neq 3.$$

Оскільки рівність не виконується, то точки не належать одній площині.

Відповідь. Не належать.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Археологи досліджують територію між трьома курганами в степу. Вони розмістили маркери в точках $A(0; 0; 0)$, $C(6; 9; 3)$, які відповідають двом курганам, і в точці $B(2; 3; 1)$, яка відповідає третьому кургану. В точці B археологи встановили вертикальну жердину, щоб визначати напрямок сліду від тіні в момент спостереження, який відповідає полудню. Археологам потрібно встановити, чи лежать три кургани на одній прямій.

1) З'ясуйте, чи пряма AC , вздовж якої падає тінь, проходить через точку B .

2) Чи відповідає напрямок тіні положенню Сонця, яке було визначене під час вимірювання в полудень?

Розв'язання. 1) Обчислимо координати векторів: $\overrightarrow{AB}(2; 3; 1)$ і $\overrightarrow{AC}(6; 9; 3)$.

Перевіримо, чи вектори колінеарні.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, то вектори — колінеарні, тобто точка B належить прямій AC .

2) Напрямок тіні лежить на прямій, що проходить між курганами A і C .

Отже, момент вимірювання положення Сонця й тіні, що падає, вибрано правильно.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть координати вектора:

1) $4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$; 2) $-2\vec{e}_1 - 7,65\vec{e}_2 + \vec{e}_3$; 3) $\frac{3}{7}\vec{e}_1 - \sqrt{2}\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$; 4) $0\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2 + \frac{1}{9}\vec{e}_3$.

2. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій:

1) $A(0; 0; 0), B(2; 4; 6), C(1; 2; 3)$; 2) $A(1; -1; 3), B(2; -2; 6), C(3; -3; 9)$;
3) $A(2; 5; 11), B(-3; 4; 0,5), C(3; 4; 5)$; 4) $A(1; 1; 1), B(2; 2; 2), C(3; 3; 3)$?

3. Чи належать точки одній площині:

1) $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(0; 0; 1), D(1; 1; 0)$;
2) $A(1; 0; 2), B(2; 1; 2), C(0; 3; 2), D(-1; 4; 2)$;
3) $A(0; 0; 0), B(1; 0; 1), C(0; 1; 1), D(1; 1; 2)$;
4) $A(2; 3; 1), B(3; 4; 2), C(4; 5; 3), D(5; 6; 4)$?

4. Розкладіть за ортами вектор:

1) $\vec{a}(-2; 5; 0)$; 2) $\vec{b}\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{5}\right)$; 3) $\vec{c}\left(0; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$; 4) $\vec{d}(6; 0; -1)$.

5. Знайдіть числа a, b і c , якщо:

1) $\vec{m}(-1; 4; 2) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$; 2) $\vec{m}(0; 7; -3) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$;
3) $\vec{m}(5; -2; 1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$; 4) $\vec{m}\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{5}\right) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$.

6. Чи колінеарні вектори $\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a}(1; 0; 2), \vec{b}(2; 1; -1), \vec{c}(7; 3; -1)$;
2) $\vec{a}(3; 4; 5), \vec{b}(-0,5; 0,5; 0), \vec{c}\left(4; \frac{1}{3}; -\frac{6}{2}\right)$?

7. При яких значеннях числа k вектори є колінеарними:

1) $\vec{a}(k; 3; -2)$ і $\vec{b}(-2; -6; -4)$;
2) $\vec{b}(2; 6; 8)$ і $\vec{a}(1; k; 4)$;
3) $\vec{a}(2; -k; 1)$ і $\vec{b}(6; 4; 5)$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a}(1; 2; 0), \vec{b}(0; 1; 1), \vec{c}(1; 3; 1)$;
2) $\vec{a}(-1; -1; -1), \vec{b}(2; 3; 4), \vec{c}(4; 3; 2)$?

Рівень В

1. Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вектор $\vec{d}(4; 2; 3)$, якщо:
1) $\vec{a}(1; 0; 1)$, $\vec{b}(0; 1; 1)$, $\vec{c}(1; 1; 0)$; 2) $\vec{a}(2; 1; 5)$, $\vec{b}(6; 4; 5)$, $\vec{c}(2; 1; 1)$.
2. Чи лежать точки A , B , C на одній прямій, якщо $\vec{OA}(3; -1; 5)$, $\vec{OB}(6; -2; 10)$, $\vec{OC}(9; -3; 15)$?
3. Знайдіть усі значення k , при яких вектори $\vec{a}(k; 3; 2)$, $\vec{b}(4; 6; k)$ є колінеарними.
4. Для яких значень k вектори $\vec{a}(k+2; 1; -3)$, $\vec{b}(5; k; -9)$ лежать на одній прямій?
5. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некопланарні. Доведіть, що компланарними є вектори:
1) $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; 2) $\vec{n} = -\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$; 3) $\vec{n} = 3\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
6. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ — неколінеарні. Знайдіть значення x і y , якщо:
1) вектори $x\vec{a} + y\vec{b}$ і $(x+2)\vec{a} + (y-1)\vec{b}$ — рівні;
2) вектори $2\vec{a} + x\vec{b}$ і $(y-3)\vec{a} + (x+1)\vec{b}$ — рівні.
7. Дано три ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, кожен два з яких, — неколінеарні. Знайдіть суму цих векторів, якщо:
1) вектор $\vec{a} + \vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$; 2) вектор $\vec{a} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{b}$.
8. У місті планують прокласти велосипедну доріжку, яка проходитиме через точки $A(2; 1; 0)$ та $M(6; 3; 0)$. Перевірте, чи лежить на прямій між точками A і M школа, якій відповідає точка $P(4; 2; 0)$.

Рівень С

1. Інженер проектує канатну підвісну систему між двома точками $K(2; 1; 0)$ і $L(6; 5; 4)$. Для встановлення допоміжної опори потрібно знайти координати точки P , яка лежить на прямій KL та розташована на відстані $3\sqrt{6}$ від точки K .
2. Два оператори дронів планують маршрути дронів у вигляді векторних рівностей: перший маршрут $\vec{R}_1 = x\vec{a} + y\vec{b}$ і другий — $\vec{R}_2 = (x+1)\vec{a} + (y-2)\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — фіксовані напрямні вектори. Знайдіть x і y , якщо маршрути дронів збігаються. Поясніть, чому важливо, щоб маршрути векторно збігалися, наприклад, при роботі в обмеженому повітряному просторі.
3. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Перевірте, чи є компланарними трійки векторів:
1) $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{A_1 B_1}$; 2) $\vec{BC}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{BA_1}$; 3) $\vec{AA_1}$, $\vec{AC}$, $\vec{BD_1}$.
4. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доведіть, що вектори $\vec{AB_1}$, $\vec{CD_1}$, $\vec{A_1 C_1}$ — компланарні.
5. Інженер проектує металеву конструкцію, що спирається на три напрямні балки, положення яких визначають вектори $\vec{a}(3; a; 6)$, $\vec{b}(6; 2a; 12)$, $\vec{c}(9; 3a; 18)$. Щоб уникнути перевантаження або перекосів конструкції, усі три вектори мають бути колінеарними. Знайдіть усі значення параметра a , при яких ця умова виконується, та поясніть, що означає колінеарність у даному випадку.
- 6*. Діагоналі паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перетинаються в точці O . Розкладіть вектори $\vec{AC}$ і $\vec{OB_1}$ за базисними векторами $\vec{AA_1}$, $\vec{AB}$, $\vec{AD}$.

- 7*.** У трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ діагоналі грані AC_1C перетинаються в точці K . Розкладіть вектори $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{A_1K}$ за векторами $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CA}$.
- 8.** $OABC$ — тетраедр. Точка N — середина ребра OC . Точка K — середина ребра AB . Розкладіть вектор $\overrightarrow{KN}$ за векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

VII. Рефлексія (2 хв)

Запропонуйте учням/ученицям оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми учнівських проєктів

- 1.** Компланарні та некомпланарні вектори в навігації дронів.
- 2.** Ортонормований базис у 3D-графіці.
- 3.** Визначення положення точки в просторі за допомогою GPS-навігаторів.
- 4.** Просторові помилки: що відбувається, якщо точки не лежать в одній площині.