

11

Тема 5.

Координати, вектори та геометричні фігури у тривимірному просторі

Урок 6. Рівняння площини у просторі. Рівняння сфери у просторі

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) складати загальне рівняння площини у просторі;
- 2) знаходити рівняння сфери;
- 3) записувати рівняння кулі;
- 4) визначати взаємне розміщення сфери та площини;
- 5) визначати взаємне розміщення двох сфер;
- 6) застосовувати знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. При яких значеннях k вектори $\vec{a}(k; -3; -2)$ і $\vec{b}(-2; -6; -4)$ є колінеарними?
2. Знайдіть числа a, b, c , якщо $\vec{m}(-1; 4; 2) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$.
3. Чи лежать точки $A(0; 0; 0)$, $B(2; 4; 6)$ і $C(1; 2; 3)$ на одній прямій?
4. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої $2x - 4y - 5 = 0$.
5. Накресліть два колінеарні вектори. Побудуйте їхню суму та різницю.

III. Загальне рівняння площини у просторі. Вектор нормалі до площини

У просторі геометрична фігура — це будь-яка множина точок.

Рівняння фігури — це рівняння з координатами $(x; y; z)$, яке виконується для кожної точки цієї фігури.

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд: $ax + by + c = 0$.

Рівняння площини у просторі має вигляд: $ax + by + cz + d = 0$, де a, b, c — коефіцієнти, які одночасно не дорівнюють 0.

Вектор нормалі до площини

Означення. Вектор нормалі до площини — це ненульовий вектор, який перпендикулярний до будь-якого вектора, що належить площині.

Тобто, якщо площина задана рівнянням $ax + by + cz + d = 0$, то вектор нормалі перпендикулярний до кожного вектора $\vec{v}$, що належить площині.

Тоді скалярний добуток векторів: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Геометричний зміст вектора нормалі

- Напрямок вектора нормалі визначає «нахил» площини у просторі;
- якщо вектор нормалі відомий, то можна записати рівняння площини.

IV. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до вектора нормалі

Якщо площина проходить через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(A; B; C)$, то рівняння площини має вигляд: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Приклад 1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $P(-1; 2; 5)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}(4; -3; 2)$.

Розв'язання. За умовою, $A = 4, B = -3, C = 2$ і $x_0 = -1, y_0 = 2, z_0 = 5$.

Підставимо зазначені числа у рівняння площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$\text{Отримаємо: } 4(x + 1) - 3(y - 2) + 2(z - 5) = 0.$$

Розкриємо дужки й спростимо вираз:

$$4x + 4 - 3y + 6 + 2z - 10 = 0,$$

$$4x - 3y + 2z = 0 \text{ — шукане рівняння.}$$

$$\text{Відповідь. } 4x - 3y + 2z = 0.$$

V. Рівняння сфери в просторі

Означення. Сфера — це геометричне місце точок (ГМТ) простору, рівновіддалених від центра сфери $O(a; b; c)$ на відстані, що називаються радіусами сфери.

Усі точки $M(x; y; z)$, для яких виконується умова $|OM| = R$, задають сферу.

Рівняння сфери з центром у точці $(a; b; c)$ і з радіусом R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Властивості радіуса сфери

1. Радіус сфери не дорівнює від'ємному числу.
2. Якщо $R = 0$, то сфера перетворюється в точку $O(a; b; c)$.
3. Якщо центр сфери збігається з початком системи координат, то рівняння сфери:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Означення. Куля — це множина точок простору, відстані від кожної з яких до заданої точки $O(a; b; c)$ не більші за задане додатне число R .

Тоді, точка $O(a; b; c)$ є центром кулі, а R — радіусом кулі.

Поверхнею кулі є сфера.

Кулю визначає нерівність: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$.

VI. Взаємне розміщення сфери та площини. Взаємне розміщення двох сфер

Взаємне розміщення сфери та площини

1. Якщо відстань від центра сфери до площини більша за радіус сфери, то сфера й площина не мають спільних точок.
2. Якщо відстань від центра сфери до площини дорівнює радіусу сфери, то сфера й площина мають одну спільну точку. Таку площину називають дотичною до сфери.
3. Якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери, то сфера й площина перетинаються по колу.

Взаємне розміщення двох сфер:

- перетинаються;
- дотикаються зовні;
- дотикаються внутрішнім дотиком;
- одна зі сфер міститься всередині іншої сфери, і сфери не мають спільних точок;
- сфери не мають спільних точок, і одна зі сфер розташована зовні іншої сфери.

Нехай R_1 — радіус першої сфери, R_2 — радіус другої сфери, d — відстань між центрами сфер.

Сфери перетинаються по колу, якщо $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$.

Сфери дотикаються зовні, якщо $d = R_1 + R_2$.

Сфери дотикаються внутрішнім дотиком, якщо $d = |R_1 - R_2|$.

Одна зі сфер міститься всередині іншої сфери і сфери, не мають спільних точок, якщо $d < |R_1 - R_2|$.

Сфери не мають спільних точок, і одна зі сфер розташована зовні іншої сфери, якщо $d > R_1 + R_2$.

Приклад 2. Обчисліть відстань між центрами сфер та визначте взаємне розміщення сфер, якщо рівняння сфер $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ і $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$.

Розв'язання. 1) Центр першої сфери $O(1; -2; 3)$ і радіус сфери дорівнює 5.

Центр другої сфери $Q(-4; -2; 3)$ і радіус сфери становить 2.

2) Знайдемо відстань між центрами сфер:

$$d = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0 + 0} = 5.$$

3) Оскільки $|R_1 - R_2| = |5 - 2| = 3$ і $R_1 + R_2 = 7$, тобто $3 < d = 5 < 7$, то сфери перетинаються по колу.

Відповідь. 1) 5. 2) Перетинаються по колу.

VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У торговому центрі потрібно встановити дві півсфери на плоскій бетонній поверхні так, що їхні основи мають лежати в одній площині. При цьому півсфери не повинні дотикатися одна до одної. За проектом, центр основи першої півсфери міститься в точці $O_1(1; 2; 3)$, а її радіус дорівнює $R_1 = 5$ м. Центр основи другої півсфери міститься в точці $O_2(1; 2; 18)$, а її радіус становить $R_2 = 3$ м.

1. Чи будуть півсфери дотикатися одна до одної, за заданих умов?

2. Вартість скла становить 250 грн за 1 м². Яка загальна вартість матеріалу для виготовлення двох півсфер, якщо врахувати, що відходи виробництва становлять 5% від загальної площі?

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Перевірте, чи належить задана точка площині:

- | | |
|--|---|
| 1) $P(2; -1; 0)$, $2x + 3y - z - 5 = 0$; | 2) $Q(0; 4; 1)$, $x - 2y + 4z + 7 = 0$; |
| 3) $R(-3; 2; 5)$, $3x + y + 2z - 8 = 0$; | 4) $S(1; 0; -2)$, $x + y + z + 3 = 0$. |

2. Запишіть рівняння площини, що проходить через задану точку й має вектор нормалі:

- | | |
|--|--|
| 1) $B(1; -2; 0)$, $\vec{n}(3; 4; -1)$; | 2) $C(-1; 3; 2)$, $\vec{n}(5; -2; 4)$; |
| 3) $D(2; 0; -1)$, $\vec{n}(-2; 1; 3)$; | 4) $A(0; -1; 4)$, $\vec{n}(1; 2; 2)$. |

3. Запишіть рівняння сфери, якщо:

- 1) центр сфери збігається з початком координат і точка $A(1; 1; 1)$ належить сфері;
- 2) центр сфери має координати $(2; 3; 2)$ і сфера перетинає вісь Ox в точці $(10; 0; 0)$;
- 3) центр сфери міститься в точці $(2; 1; -4)$ і сфера проходить через точку $C(5; 2; -6)$.

4. Складіть рівняння площини, якій належать точки:

- | | |
|---|--|
| 1) $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; 2; 4)$; | 2) $A(3; 4; 5)$, $B(7; 3; 11)$, $C(0; 5; 8)$; |
| 3) $A(-5; 2; 3)$, $B(-1; 1; -1)$, $C(6; 2; -5)$; | 4) $A(10; 3; 8)$, $B(-2; 3; -1)$, $C(6; 9; 3)$. |

5. Запишіть рівняння сфери та кулі з центром у точці A та з радіусом R :

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| 1) $A(0; 0; 0)$, $R = 7$; | 2) $A(0; 2; 3)$, $R = 5$; |
| 3) $A(4; 5; 5)$, $R = 8$; | 4) $A(-3; 3; 1)$, $R = 10$. |

- 6.** Чи належить сфері, що задана рівнянням $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$, точка:
1) $A(2; 1; 3)$; 2) $B(3; 1; 4)$; 3) $C(0; 2; 3)$; 4) $D(3; 3; 3)$?
- 7.** Запишіть рівняння сфери, що дотикається до площини й має центр у заданій точці:
1) $A(-2; 5; 4)$, $2x - 3y + 6z - 12 = 0$; 2) $B(4; -1; 2)$, $x + 2y - 2z + 5 = 0$.
- 8.** Запишіть рівняння сфери, що має центр у заданій точці й дотикається до осей координат:
1) $C(3; 4; -2)$; 2) $K(-5; 2; 1)$.
- 9.** Запишіть рівняння сфери, що проходить через точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; -1; 4)$, $C(0; 0; 5)$. Центр сфери належить площині $x - y + 2z - 6 = 0$.
- 10.** Складіть рівняння сфери, що проходить через точки $M(0; 2; 2)$, $N(-3; 1; 4)$, $K(2; -1; 1)$. Центр сфери належить площині $x + 2y - z + 1 = 0$.

Рівень В

- 1.** Знайдіть рівняння площини, дотичної до сфери $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$ у точці $O(0; 0; 0)$.
- 2.** Знайдіть кут між площинами $3x - y + 2z - 5 = 0$ і $x + 2y + 2z + 1 = 0$.
Зауваження. Кут між площинами дорівнює куту між їхніми нормаллями.
- 3.** Знайдіть рівняння площини, яка перпендикулярна до однієї з координатних осей і проходить через точку:
1) $P(1; 0; 3)$; 2) $O(-2; 4; 1)$; 3) $R(0; -1; 5)$; 4) $A(3; 2; 0)$.
- 4.** Запишіть рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора нормалі $\vec{n}$ та проходить через точку A :
1) $\vec{n}(2; 1; -3)$, $A(1; -2; 0)$; 2) $\vec{n}(-1; 4; 2)$, $A(3; 0; -1)$;
3) $\vec{n}(5; -2; 1)$, $A(0; 2; 3)$; 4) $\vec{n}(1; 1; 1)$, $A(-1; 1; 2)$.
- 5.** Знайдіть центр та радіус сфери:
1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 15 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 10y + 6z + 9 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10z - 20 = 0$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 4y - 6z + 25 = 0$.
- 6.** Знайдіть кут між прямою, яка проходить через точки $C(2; -1; 0)$, $D(4; 3; -2)$ та площиною $2x - y + z - 5 = 0$.
- 7.** Інженер-будівельник проектує підземний резервуар у формі сфери. Відомо, що резервуар має проходити через три контрольні точки $P_1(5; 0; 0)$, $P_2(0; 5; 0)$, $P_3(0; 0; 5)$. Центр сферичного резервуару має лежати на поверхні землі, яка задається площиною $x + y + z = 10$. Складіть рівняння сфери, яке відповідає умові задачі.
- 8.** Запишіть рівняння сфери, що проходить через чотири точки:
1) $A(2; -1; 3)$, $B(-4; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$, $D(3; 0; 1)$;
2) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-3; 2; 4)$, $D(1; -2; 3)$;
3) $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(3; -2; 1)$, $D(2; 1; -3)$;
4) $A(5; -1; 0)$, $B(0; 2; 3)$, $C(-2; -2; 4)$, $D(1; 3; -1)$.

Рівень С

- 1.** Знайдіть відстань між прямими AB і CD , якщо $A(1; 0; 2)$, $B(2; 3; -1)$, $C(0; 1; 4)$, $D(3; -2; 0)$.

- 2.** Укажіть кілька точок, які належать прямій, що визначається системою рівнянь:
- $$1) \begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ 2x + y - z = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y - 3z + 4 = 0, \\ 3x - y + z - 2 = 0. \end{cases}$$
- 3.** Укажіть взаємне розміщення прямих, заданих рівняннями:
- $$1) \begin{cases} x + y = 3, \\ z = 1; \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x - y = 1, \\ z = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2, \\ y - z = 0; \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = -1, \\ y + z = 4; \end{cases}$$
- $$3) \begin{cases} y = 3, \\ x + z = 0; \end{cases} \text{ та } \begin{cases} y = 3, \\ x - z = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + 2y = 0, \\ z = 2; \end{cases} \text{ та } \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = -3. \end{cases}$$
- 4.** Визначте взаємне розміщення сфер:
- $$1) x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3z + 1 = 0 \text{ та } x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + z - 11 = 0;$$
- $$2) (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ та } (x + 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16.$$
- 5.** У 3D-моделюванні комп'ютерної гри кулю задано рівнянням
- $$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 9 = 0.$$
- Куля є силовим полем, яке захищає ігрового персонажа. Знайдіть центр і радіус кулі. Персонаж перебуває у точці $P(2; -1; 1)$. З'ясуйте, чи точка P міститься всередині кулі, на поверхні кулі чи зовні кулі.
- 6.** Знайдіть множину точок, рівновіддалених від площин:
- $$1) x - 2y + z - 4 = 0 \text{ і } x - 2y + z + 6 = 0; \quad 2) 3x + y - z + 2 = 0 \text{ і } 3x + y - z - 8 = 0.$$
- 7*.** Складіть рівняння сфери, описаної навколо тетраедра $ABCD$, де $A(6; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 10)$, $D(0; 0; 0)$.
- 8*.** Запишіть рівняння сфери, яка є гомотетичною до сфери
- $$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 16,$$
- з центром гомотетії у точці $O(0; 0; 0)$ і коефіцієнтом гомотетії:
- $$1) k = 2; \quad 2) k = -0,5.$$

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності

6) Найбільше мені сподобалося

.....

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Площини в архітектурі та у будівництві.
- 2.** Використання рівнянь площин у комп'ютерній графіці та в 3D-моделюванні.
- 3.** Сфера в астрономії.
- 4.** Сферичні поверхні в техніці та у дизайні.
- 5.** Сфера навколо нас: фотопроект з математичним поясненням.
- 6.** Побудова та візуалізація сфери в GeoGebra або в Desmos 3D.







