

11

Тема 5.

Координати, вектори та геометричні фігури у тривимірному просторі

Урок 6. Рівняння площини у просторі. Рівняння сфери у просторі

План уроку

1. Загальне рівняння площини у просторі.
2. Вектор нормалі до площини.
3. Різновиди рівнянь площини у просторі.
4. Рівняння сфери у просторі.
5. Взаємне розміщення сфери та площини.
6. Взаємне розміщення двох сфер.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає дані, потрібні для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 1.2.3-1];

визначає, аналізує й узагальнює зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами

реального світу [12 МАО 4.1.1-1];

вирізняє комплексні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними

методами [12 МАО 1.1.1-1];

пропонує шляхи досягнення результатів розв'язання проблемної ситуації, передбачаючи можливі ризики [12 МАО 1.3.2-1];

самостійно й у співпраці з іншими оцінює різні моделі та шляхи розв'язання

комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.

- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової активності наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обов'язково заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 6) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Створення проектів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 8) Можливі теми для створення проектів запропоновані. Також темами проектів можуть бути практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проекту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1. Як можна задати площину у просторі, не використовуючи рисунків?
2. Якщо літак летить на певній висоті, то чи важливо знати, яке рівняння описує його траєкторію польоту?
3. Як перевірити, чи деяка точка у 3D-моделі лежить на поверхні сфери?
4. Чому в комп'ютерній графіці важливо визначати площини для накладання текстур?
5. Чи важливо у GPS-навігації вміти описати площину, в якій перебуває супутник?

II. Повторення (4–5 хв)

1. При яких значеннях k вектори $\vec{a}(k; -3; -2)$ і $\vec{b}(-2; -6; -4)$ є колінеарними?
Відповідь. -1 .
2. Знайдіть числа a, b, c , якщо $\vec{m}(-1; 4; 2) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$.
Відповідь. $a = -1, b = 4, c = 2$.
3. Чи лежать точки $A(0; 0; 0), B(2; 4; 6)$ і $C(1; 2; 3)$ на одній прямій?
Відповідь. Так.
4. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої $2x - 4y - 5 = 0$.
Відповідь. $0,5$.

5. Накресліть два колінеарні вектори. Побудуйте їхню суму та різницю.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У торговому центрі потрібно встановити дві півсфери на плоскій бетонній поверхні так, що їхні основи мають лежати в одній площині. При цьому півсфери не повинні дотикатися одна до одної. За проектом, центр основи першої півсфери міститься в точці $O_1(1; 2; 3)$, а її радіус дорівнює $R_1 = 5$ м. Центр основи другої півсфери міститься в точці $O_2(1; 2; 18)$, а її радіус становить $R_2 = 3$ м.

1. Чи будуть півсфери дотикатися одна до одної, за заданих умов?
2. Вартість скла становить 250 грн за 1 м^2 . Яка загальна вартість матеріалу для виготовлення двох півсфер, якщо врахувати, що відходи виробництва становлять 5% від загальної площі?

III. Загальне рівняння площини у просторі. Вектор нормалі до площини (5-7 хв)

У просторі геометрична фігура — це будь-яка множина точок.

Рівняння фігури — це рівняння з координатами $(x; y; z)$, яке виконується для кожної точки цієї фігури.

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд: $ax + by + c = 0$.

Рівняння площини у просторі має вигляд: $ax + by + cz + d = 0$, де a, b, c — коефіцієнти, які одночасно не дорівнюють 0.

Вектор нормалі до площини

Означення. Вектор нормалі до площини — це ненульовий вектор, який перпендикулярний до будь-якого вектора, що належить площині.

Тобто, якщо площина задана рівнянням $ax + by + cz + d = 0$, то вектор нормалі перпендикулярний до кожного вектора $\vec{v}$, що належить площині.

Тоді скалярний добуток векторів: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Геометричний зміст вектора нормалі

- Напрямок вектора нормалі визначає «нахил» площини у просторі;
- якщо вектор нормалі відомий, то можна записати рівняння площини.

Ілюстративний приклад

6. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$ і $C(0; 1; 1)$.

Розв'язання. Площина проходить через початок системи координат.

Оскільки $ax + by + cz + d = 0$ — рівняння площини, то складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0; \end{cases} \begin{cases} d = 0, \\ a + d = 0, \\ b + c + d = 0. \end{cases}$$

Отже, для рівняння площини, яка проходить через початок координат, $d = 0$.

Тоді $a = 0$ і $b = -c$.

Знайдені числа підставимо в рівняння площини:

$$0 \cdot x + by + (-b) \cdot z + 0 = 0, \text{ звідси } by - bz = 0, y = z.$$

Відповідь. $y = z$.

IV. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до вектора нормалі

Якщо площина проходить через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(A; B; C)$, то рівняння площини має вигляд: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Ілюстративний приклад

7. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $P(-1; 2; 5)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}(4; -3; 2)$.

Розв'язання. За умовою, $A = 4$, $B = -3$, $C = 2$ і $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 5$.

Підставимо зазначені числа у рівняння площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$\text{Отримаємо: } 4(x + 1) - 3(y - 2) + 2(z - 5) = 0.$$

Розкриємо дужки й спростимо вираз:

$$4x + 4 - 3y + 6 + 2z - 10 = 0,$$

$$4x - 3y + 2z = 0 \text{ — шукане рівняння.}$$

Відповідь. $4x - 3y + 2z = 0$.

V. Рівняння сфери в просторі (5 хв)

Означення. Сфера — це геометричне місце точок (ГМТ) простору, рівновіддалених від центра сфери $O(a; b; c)$ на відстані, що називаються радіусами сфери.

Усі точки $M(x; y; z)$, для яких виконується умова $|OM| = R$, задають сферу.

Рівняння сфери з центром у точці $(a; b; c)$ і з радіусом R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Властивості радіуса сфери

1. Радіус сфери не дорівнює від'ємному числу.
2. Якщо $R = 0$, то сфера перетворюється в точку $O(a; b; c)$.
3. Якщо центр сфери збігається з початком системи координат, то рівняння сфери:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Означення. Куля — це множина точок простору, відстані від кожної з яких до заданої точки $O(a; b; c)$ не більші за задане додатне число R .

Тоді, точка $O(a; b; c)$ є центром кулі, а R — радіусом кулі.

Поверхнею кулі є сфера.

Кулю визначає нерівність: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$.

Ілюстративний приклад

8. Запишіть рівняння кулі з центром у точці $O(3; 15; -9)$ і з радіусом 5.

Розв'язання. Оскільки кулю визначає нерівність $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$, то:

$$(x - 3)^2 + (y - 15)^2 + (z - (-9))^2 \leq 5^2,$$

$$(x - 3)^2 + (y - 15)^2 + (z + 9)^2 \leq 25.$$

Відповідь. $(x - 3)^2 + (y - 15)^2 + (z + 9)^2 \leq 25$.

VI. Взаємне розміщення сфери та площини. Взаємне розміщення двох сфер (5–7 хв)

Взаємне розміщення сфери та площини

1. Якщо відстань від центра сфери до площини більша за радіус сфери, то сфера й площина не мають спільних точок.
2. Якщо відстань від центра сфери до площини дорівнює радіусу сфери, то сфера й площина мають одну спільну точку. Таку площину називають дотичною до сфери.
3. Якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери, то сфера й площина перетинаються по колу.

Взаємне розміщення двох сфер:

- перетинаються;
- дотикаються зовні;
- дотикаються внутрішнім дотиком;
- одна зі сфер міститься всередині іншої сфери, і сфери не мають спільних точок;
- сфери не мають спільних точок, і одна зі сфер розташована зовні іншої сфери.

Нехай R_1 — радіус першої сфери, R_2 — радіус другої сфери, d — відстань між центрами сфер.

Сфери перетинаються по колу, якщо $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$.

Сфери дотикаються зовні, якщо $d = R_1 + R_2$.

Сфери дотикаються внутрішнім дотиком, якщо $d = |R_1 - R_2|$.

Одна зі сфер міститься всередині іншої сфери і сфери, не мають спільних точок, якщо $d < |R_1 - R_2|$.

Сфери не мають спільних точок, і одна зі сфер розташована зовні іншої сфери, якщо $d > R_1 + R_2$.

Ілюстративний приклад

9. Обчисліть відстань між центрами сфер та визначте взаємне розміщення сфер, якщо рівняння сфер $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ і $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$.

Розв'язання. 1) Центр першої сфери $O(1; -2; 3)$ і радіус сфери дорівнює 5.

Центр другої сфери $Q(-4; -2; 3)$ і радіус сфери становить 2.

2) Знайдемо відстань між центрами сфер:

$$d = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0 + 0} = 5.$$

3) Оскільки $|R_1 - R_2| = |5 - 2| = 3$ і $R_1 + R_2 = 7$, тобто $3 < d = 5 < 7$, то сфери перетинаються по колу.

Відповідь. 1) 5. 2) Перетинаються по колу.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У торговому центрі потрібно встановити дві півсфери на плоскій бетонній поверхні так, що їхні основи мають лежати в одній площині. При цьому півсфери не повинні дотикатися одна до одної. За проектом, центр основи першої півсфери міститься в точці $O_1(1; 2; 3)$, а її радіус дорівнює $R_1 = 5$ м. Центр основи другої півсфери міститься в точці $O_2(10; 2; 3)$, а її радіус становить $R_2 = 3$ м.

1. Чи будуть півсфери дотикатися одна до одної, за заданих умов?
2. Вартість скла становить 250 грн за 1 м². Яка загальна вартість матеріалу для виготовлення двох півсфер, якщо врахувати, що відходи виробництва становлять 5% від загальної площі?

Розв'язання.

1. З'ясуємо, чи півсфери дотикаються.

Знайдемо відстань d між їхніми центрами $O_1(1; 2; 3)$ та $O_2(10; 2; 3)$:

$$d = \sqrt{(10-1)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{9^2 + 0 + 0} = 9 \text{ (м)}.$$

Сума радіусів сфер становить $R_1 + R_2 = 5 + 3 = 8$ (м).

Оскільки відстань між центрами $d = 9$ м більша за суму радіусів, то півсфери не дотикаються.

2. Для розрахунку вартості матеріалу використовуємо площу поверхні півсфери:

$$S = 2\pi R^2.$$

$$S_1 = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 50\pi \approx 157 \text{ (м}^2\text{)}.$$

$$S_2 = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 18\pi \approx 56,52 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Загальна площа матеріалу:

$$S = S_1 + S_2 = 157 + 56,52 = 213,52 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Знайдемо 5% від загальної площі двох півсфер: $0,05 \cdot 213,52 = 10,676 \text{ (м}^2\text{)}.$

Отже, загальна площа скла: $213,52 + 10,676 = 224,196 \text{ (м}^2\text{)}.$

Вартість матеріалу: $250 \cdot 224,196 = 56049 \text{ (грн)}.$

Відповідь. 1) Не дотикаються. 2) 56049 грн.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Перевірте, чи належить задана точка площині:
 - 1) $P(2; -1; 0)$, $2x + 3y - z - 5 = 0$;
 - 2) $Q(0; 4; 1)$, $x - 2y + 4z + 7 = 0$;
 - 3) $R(-3; 2; 5)$, $3x + y + 2z - 8 = 0$;
 - 4) $S(1; 0; -2)$, $x + y + z + 3 = 0$.
2. Запишіть рівняння площини, що проходить через задану точку й має вектор нормалі:
 - 1) $B(1; -2; 0)$, $\vec{n}(3; 4; -1)$;
 - 2) $C(-1; 3; 2)$, $\vec{n}(5; -2; 4)$;
 - 3) $D(2; 0; -1)$, $\vec{n}(-2; 1; 3)$;
 - 4) $A(0; -1; 4)$, $\vec{n}(1; 2; 2)$.

3. Запишіть рівняння сфери, якщо:
 - 1) центр сфери збігається з початком координат і точка $A(1; 1; 1)$ належить сфері;
 - 2) центр сфери має координати $(2; 3; 2)$ і сфера перетинає вісь Ox в точці $(10; 0; 0)$;
 - 3) центр сфери міститься в точці $(2; 1; -4)$ і сфера проходить через точку $C(5; 2; -6)$.
4. Складіть рівняння площини, якій належать точки:
 - 1) $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; 2; 4)$;
 - 2) $A(3; 4; 5)$, $B(7; 3; 11)$, $C(0; 5; 8)$;
 - 3) $A(-5; 2; 3)$, $B(-1; 1; -1)$, $C(6; 2; -5)$;
 - 4) $A(10; 3; 8)$, $B(-2; 3; -1)$, $C(6; 9; 3)$.
5. Запишіть рівняння сфери та кулі з центром у точці A та з радіусом R :
 - 1) $A(0; 0; 0)$, $R = 7$;
 - 2) $A(0; 2; 3)$, $R = 5$;
 - 3) $A(4; 5; 5)$, $R = 8$;
 - 4) $A(-3; 3; 1)$, $R = 10$.
6. Чи належить сфері, що задана рівнянням $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$, точка:
 - 1) $A(2; 1; 3)$;
 - 2) $B(3; 1; 4)$;
 - 3) $C(0; 2; 3)$;
 - 4) $D(3; 3; 3)$?
7. Запишіть рівняння сфери, що дотикається до площини й має центр у заданій точці:
 - 1) $A(-2; 5; 4)$, $2x - 3y + 6z - 12 = 0$;
 - 2) $B(4; -1; 2)$, $x + 2y - 2z + 5 = 0$.
8. Запишіть рівняння сфери, що має центр у заданій точці й дотикається до осей координат:
 - 1) $C(3; 4; -2)$;
 - 2) $K(-5; 2; 1)$.
9. Запишіть рівняння сфери, що проходить через точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; -1; 4)$, $C(0; 0; 5)$.
Центр сфери належить площині $x - y + 2z - 6 = 0$.
10. Складіть рівняння сфери, що проходить через точки $M(0; 2; 2)$, $N(-3; 1; 4)$, $K(2; -1; 1)$.
Центр сфери належить площині $x + 2y - z + 1 = 0$.

Рівень В

1. Знайдіть рівняння площини, дотичної до сфери $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$ у точці $O(0; 0; 0)$.
2. Знайдіть кут між площинами $3x - y + 2z - 5 = 0$ і $x + 2y + 2z + 1 = 0$.
Зауваження. Кут між площинами дорівнює куту між їхніми нормальними.
3. Знайдіть рівняння площини, яка перпендикулярна до однієї з координатних осей і проходить через точку:
 - 1) $P(1; 0; 3)$;
 - 2) $O(-2; 4; 1)$;
 - 3) $R(0; -1; 5)$;
 - 4) $A(3; 2; 0)$.
4. Запишіть рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора нормалі $\vec{n}$ та проходить через точку A :
 - 1) $\vec{n}(2; 1; -3)$, $A(1; -2; 0)$;
 - 2) $\vec{n}(-1; 4; 2)$, $A(3; 0; -1)$;
 - 3) $\vec{n}(5; -2; 1)$, $A(0; 2; 3)$;
 - 4) $\vec{n}(1; 1; 1)$, $A(-1; 1; 2)$.
5. Знайдіть центр та радіус сфери:
 - 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 15 = 0$;
 - 2) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 10y + 6z + 9 = 0$;
 - 3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10z - 20 = 0$;
 - 4) $x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 4y - 6z + 25 = 0$.
6. Знайдіть кут між прямою, яка проходить через точки $C(2; -1; 0)$, $D(4; 3; -2)$ та площиною $2x - y + z - 5 = 0$.

- 7.** Інженер-будівельник проектує підземний резервуар у формі сфери. Відомо, що резервуар має проходити через три контрольні точки $P_1(5; 0; 0)$, $P_2(0; 5; 0)$, $P_3(0; 0; 5)$. Центр сферичного резервуару має лежати на поверхні землі, яка задається площиною $x + y + z = 10$. Складіть рівняння сфери, яке відповідає умові задачі.
- 8.** Запишіть рівняння сфери, що проходить через чотири точки:
- 1) $A(2; -1; 3)$, $B(-4; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$, $D(3; 0; 1)$;
 - 2) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-3; 2; 4)$, $D(1; -2; 3)$;
 - 3) $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(3; -2; 1)$, $D(2; 1; -3)$;
 - 4) $A(5; -1; 0)$, $B(0; 2; 3)$, $C(-2; -2; 4)$, $D(1; 3; -1)$.

Рівень С

- 1.** Знайдіть відстань між прямими AB і CD , якщо $A(1; 0; 2)$, $B(2; 3; -1)$, $C(0; 1; 4)$, $D(3; -2; 0)$.
- 2.** Укажіть кілька точок, які належать прямій, що визначається системою рівнянь:
- 1) $\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ 2x + y - z = 1; \end{cases}$
 - 2) $\begin{cases} x + 2y - 3z + 4 = 0, \\ 3x - y + z - 2 = 0. \end{cases}$
- 3.** Укажіть взаємне розміщення прямих, заданих рівняннями:
- 1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ z = 1; \end{cases}$ та $\begin{cases} x - y = 1, \\ z = 1; \end{cases}$
 - 2) $\begin{cases} x = 2, \\ y - z = 0; \end{cases}$ та $\begin{cases} x = -1, \\ y + z = 4; \end{cases}$
 - 3) $\begin{cases} y = 3, \\ x + z = 0; \end{cases}$ та $\begin{cases} y = 3, \\ x - z = 4; \end{cases}$
 - 4) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ z = 2; \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = -3. \end{cases}$
- 4.** Визначте взаємне розміщення сфер:
- 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3z + 1 = 0$ та $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + z - 11 = 0$;
 - 2) $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 9$ та $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$.
- 5.** У 3D-моделюванні комп'ютерної гри кулю задано рівнянням
- $$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 9 = 0.$$
- Куля є силовим полем, яке захищає ігрового персонажа. Знайдіть центр і радіус кулі. Персонаж перебуває у точці $P(2; -1; 1)$. З'ясуйте, чи точка P міститься всередині кулі, на поверхні кулі чи зовні кулі.
- 6.** Знайдіть множину точок, рівновіддалених від площин:
- 1) $x - 2y + z - 4 = 0$ і $x - 2y + z + 6 = 0$;
 - 2) $3x + y - z + 2 = 0$ і $3x + y - z - 8 = 0$.
- 7*.** Складіть рівняння сфери, описаної навколо тетраедра $ABCD$, де $A(6; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 10)$, $D(0; 0; 0)$.
- 8*.** Запишіть рівняння сфери, яка є гомотетичною до сфери
- $$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 16,$$
- з центром гомотетії у точці $O(0; 0; 0)$ і коефіцієнтом гомотетії:
- 1) $k = 2$;
 - 2) $k = -0,5$.

ІХ. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми учнівських проєктів

1. Площини в архітектурі та у будівництві.
2. Використання рівнянь площин у комп'ютерній графіці та в 3D-моделюванні.
3. Сфера в астрономії.
4. Сферичні поверхні в техніці та у дизайні.
5. Сфера навколо нас: фотопроєкт з математичним поясненням.
6. Побудова та візуалізація сфери в GeoGebra або в Desmos 3D.