

# Координати, вектори та геометричні фігури у тривимірному просторі

## Урок 7. Урок–практикум. Розв’язування задач

### РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

#### I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) дізнаєтесь про застосування векторів для розв’язування задач;
- 2) навчитеся розв’язувати задачі на доведення векторно-координатним методом;
- 3) навчитеся розв’язувати задачі на обчислення векторно-координатним методом;
- 4) удосконалисте навички розв’язування практичних задач.

#### II. Повторення

1. Запишіть рівняння сфери, всі точки якої рівновіддалені від початку координат на 2 одиниці.
2. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 1; 1)$ ,  $C(0; 2; 2)$ .
3. Чи належить точка  $(1; -2; 3)$  сфері з центром  $O(1; -2; 6)$  і з радіусом 3?
4. Запишіть координати центра сфери та її радіус, якщо сферу задано рівнянням  $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 2,25$ .

### III. Розв'язування задач на доведення

**Векторно-координатний метод** застосовують при доведенні властивостей геометричних фігур.

#### Алгоритм розв'язування задач векторно-координатним методом

1. Уведіть систему координат.  
Вибирайте початок системи координат і напрямки осей так, щоб координати точок були якомога простішими.
2. Запишіть координати всіх точок у вибраній системі координат.
3. Уведіть вектори.  
Запишіть вектори через координати точок.  
Наприклад, якщо  $A(x_1; y_1; z_1)$  та  $B(x_2; y_2; z_2)$ , то  $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ .
4. Використовуйте властивості векторів, умови колінеарності та перпендикулярності векторів.

**Приклад 1.** Доведіть, якщо медіана трикутника перпендикулярна до сторони, до якої вона проведена, то трикутник — рівнобедрений.

*Доведення.* 1) Розмістимо трикутник  $ABC$  у системі координат так, щоб медіана  $AM$  лежала на осі  $y$ , а точка  $M$  збігалася з початком системи координат. Тоді точки  $A$  і  $M$  матимуть координати:  $A(0; a; 0)$ ,  $M(0; 0; 0)$ .

2) Оскільки точка  $M$  — середина  $BC$ , а медіана  $AM$  перпендикулярна до сторони  $BC$ , то відрізок  $BC$  перпендикулярний до осі  $y$ , тобто, паралельний площині  $xz$ .

Запишемо координати точок  $B$  і  $C$ :  $B(-b; 0; c)$  та  $C(b; 0; -c)$ .

Виконаємо перевірку. Оскільки точка  $M$  — середина  $BC$ , то координати точки:

$$x_M = \frac{-b+b}{2} = 0, \quad y_M = \frac{0+0}{2} = 0, \quad z_M = \frac{c-c}{2} = 0.$$

Таким чином, координати точок  $B$  і  $C$  вибрано правильно.

3) Порівняємо квадрати довжин сторін  $AB$  та  $AC$ :

$$AB^2 = (-b - 0)^2 + (0 - a)^2 + (c - 0)^2 = b^2 + a^2 + c^2,$$

$$AC^2 = (b - 0)^2 + (0 - a)^2 + (-c - 0)^2 = b^2 + a^2 + c^2.$$

Оскільки  $AB^2 = AC^2$ , то  $AB = AC$ . Тобто довжини сторін  $AB$  і  $AC$  — рівні.

Отже, трикутник  $ABC$  — рівнобедрений.

### IV. Розв'язування задач на обчислення

**Векторно-координатний метод** застосовують при обчисленні довжин відрізків, кутів між прямими та площинами, площ фігур тощо.

#### Відповідність між геометричними твердженнями та властивостями векторів

1. Якщо прямі паралельні,  $a \parallel b$ , тоді вектори колінеарні:  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ .
2. Точка  $C$  належить прямій  $AB$ , тоді  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ .

3. Якщо прямі перпендикулярні, то скалярний добуток векторів дорівнює 0, за умови, що вектори ненульові,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .
4. Кут між прямими дорівнює куту між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , побудованими на прямих:
- $$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**Приклад 2.** Знайдіть кут між мимобіжними прямими  $AC_1$  і  $CB_1$ , якщо три ребра куба лежать на координатних осях.

*Розв'язання.* Виконаємо побудову (див. рисунок). Уздовж ребер куба  $AB$ ,  $BC$  і  $BB_1$  проведемо координатні осі  $x$ ,  $y$  і  $z$  відповідно. Нехай ребро куба дорівнює  $a$ . Тоді точки, які є кінцями відрізків  $AC_1$  і  $CB_1$  мають координати:  $A(a; 0; 0)$ ,  $C_1(0; a; a)$ ,  $C(0; a; 0)$ ,  $B_1(0; 0; a)$ .

Знайдемо координати векторів  $AC_1$  і  $CB_1$ :

$$\overrightarrow{AC_1}(0 - a; a - 0; a - 0) = (-a; a; a),$$

$$\overrightarrow{CB_1}(0 - 0; 0 - a; a - 0) = (0; -a; a).$$

Знайдемо довжини цих векторів:

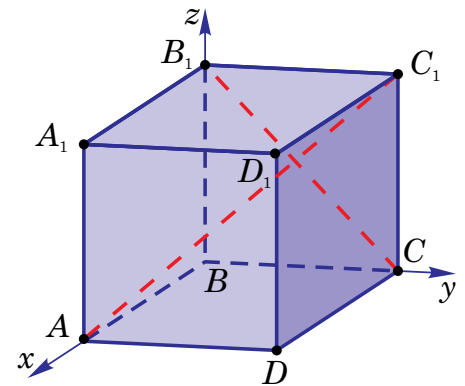
$$|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a, \quad |\overrightarrow{CB_1}| = \sqrt{0^2 + (-a)^2 + a^2} = \sqrt{2}a.$$

Обчислимо косинус кута між векторами  $AC_1$  і  $CB_1$ :

$$\cos \angle(\overrightarrow{AC_1}; \overrightarrow{CB_1}) = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{AC_1}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|} = \frac{-a \cdot 0 + a \cdot (-a) + a \cdot a}{\sqrt{3}a \cdot \sqrt{2}a} = \frac{-a^2 + a^2}{\sqrt{6}a^2} = 0.$$

Оскільки косинус кута між векторами дорівнює 0, то вектори — перпендикулярні. Отже, кут між мимобіжними прямими  $AC_1$  і  $CB_1$  дорівнює  $90^\circ$ .

*Відповідь.*  $90^\circ$ .



## V. Розв'язування практичної задачі

### Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Архітектор проектує скляний навіс, який має бути закріплений на трьох металевих опорах, розміщених у точках з координатами  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 4)$ .
- 1) Як архітектору знайти рівняння площини, в якій буде розміщена поверхня навісу?
  - 2) Перевірте, чи буде точка  $D(1; 1; 1)$  належати цій площині.

## VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

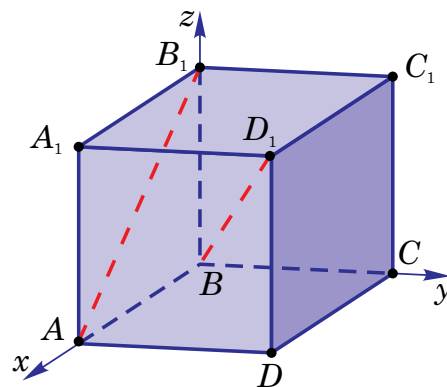
### Рівень А

1. Якщо  $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ , то яке взаємне розташування відрізків  $EF$  і  $GH$ ?
2. Дано трикутник  $KLM$ . Точка  $P$  є серединою сторони  $KL$ , а точка  $Q$  — середина сторони  $KM$ . Яке взаємне розташування векторів  $\overrightarrow{PQ}$  і  $\overrightarrow{LM}$ ?

3. Майстер монтує настінну полицку у вигляді плоскої трикутної панелі. Він закріплює її у трьох точках  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(3; 0; 0)$ ,  $C(0; 2; 0)$ . Знайдіть рівняння площини, в якій лежить полицка. Чи належить точка  $D(1; 1; 0)$  площині полицки?
4. Дано точки  $A(1; 3; -2)$ ,  $B(x; 5; 4)$ ,  $C(2; 4; 0)$ ,  $D(4; y; z)$ . Знайдіть координати  $x$ ,  $y$  і  $z$ , якщо  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .
5. Установіть взаємне розташування точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , якщо:
  - 1)  $\overline{AC} = 3\overline{AB}$ ;
  - 2)  $\overline{AC} = -\frac{1}{3}\overline{AB}$ .
6. Визначте кут між векторами  $\vec{a} - \vec{b}$  і  $\vec{c}$  у градусах, якщо відомо, що  $\vec{a}(3; 5; -4)$ ,  $\vec{b}(-2; 5; -4)$  і  $\vec{c}(0; 0; 2)$ . (ЗНО, 2008 р.).
7. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  мають координати  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(2; -1; 4)$ ,  $C(4; -2; 8)$ . Чи лежать ці точки на одній прямій?
8. У кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром завдовжки 1 точка  $M$  є серединою ребра  $A_1 B_1$ , а точка  $N$  — серединою ребра  $B_1 C_1$ . Знайдіть:
  - 1) довжину відрізка  $MN$ ;
  - 2) довжину відрізка  $AN$ ;
  - 3) довжину відрізка  $DM$ ;
  - 4) довжину відрізка  $D_1 N$ .
9. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром, довжина якого дорівнює  $a$ . Знайдіть кут між векторами:
  - 1)  $\overline{AB}$  і  $\overline{BC}$ ;
  - 2)  $\overline{AC}$  і  $\overline{BD}$ ;
  - 3)  $\overline{A_1 B}$  і  $\overline{AC_1}$ ;
  - 4)  $\overline{A_1 B_1}$  і  $\overline{B_1 D}$ .
10. Вершини чотирикутника  $ABCD$  мають координати  $A(-2; 1; 0)$ ,  $B(0; 4; 2)$ ,  $C(3; 5; 0)$ ,  $D(1; 2; -2)$ . Доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.

### Рівень В

1. Установіть вид трикутника  $ABC$ , якщо  $\overline{AB}(2; -1; 3)$ ,  $\overline{AC}(1; 2; -1)$ .
2. Паралелограми  $ABCD$  і  $A_1 B_1 C_1 D_1$  не лежать в одній площині. За допомогою векторів доведіть, що  $\overline{BB_1} \parallel \overline{DD_1}$ .
3. На осі ординат знайдіть точку  $C$ , щоб у трикутнику  $ABC$  кут  $C$  був прямим, якщо точки  $A(1; 1; 1)$  і  $B(3; 5; 0)$  — вершини трикутника.
4. Дано прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у якого  $AB = 4$ ,  $AD = 5$ ,  $AA_1 = 3$ . Знайдіть кут між векторами  $\overline{A_1 C}$  і  $\overline{BD}$ .
5. Знайдіть кут між мимобіжними прямими  $BD_1$  і  $AB_1$ , якщо три ребра куба лежать на координатних осях (див. рисунок).



6. На ребрі  $AD$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взято точку  $M$  так, що  $AM : MD = 1 : 2$ . На ребрі  $B_1 C_1$  взято точку  $N$  — середину ребра. Знайдіть довжину відрізка  $MN$ , якщо довжина ребра куба дорівнює 6.
7. Дано точки  $M(2; -4; 6)$  і  $N(-1; 5; -3)$ . У якій точці пряма  $MN$  перетинає площину  $yz$ ?
8. Знайдіть точку перетину площини  $x + 2y - z + 4 = 0$  з прямою, яка проходить через точки  $A(1; 3; -2)$  і  $B(3; -1; 4)$ .
9. Знайдіть площу трикутника з вершинами  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(3; 0; -3)$ ,  $C(5; 2; 6)$ .
10. Знайдіть радіус і координати центра сфери  $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y = 26$ .

### Рівень С

1. За допомогою векторів доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
2. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром, яке дорівнює  $a$ . За допомогою векторів визначте кут між мимобіжними прямими  $A_1 C$  і  $BD_1$ .
3. У кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $P$  є серединою ребра  $A_1 B_1$ , а точка  $Q$  належить ребру  $DD_1$ . При цьому  $D_1 Q : QD = 1 : 2$ . Знайдіть кут між прямою  $PQ$  і діагоналлю  $AC_1$ .
4. Усі грані паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — рівні ромби,  $AB = a$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ . Знайдіть довжину діагоналі  $AC_1$ .
5. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки:  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; 4; -1)$ ,  $C(2; -4; 5)$ .
6. Знайдіть координати точки перетину прямої  $AB$  з віссю аплікат, якщо  $A(2; 6; 7)$ ,  $B(-1; -3; 1)$ .
7. Через точку  $A(-12; 3; -4)$ , яка належить сфері  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ , проведено площину, перпендикулярну до осі абсцис. Знайдіть довжину кола, утвореного в перерізі.
8. Три вершини паралелограма  $ABCD$  мають координати  $A(0; -1; 9)$ ,  $B(3; 8; 4)$ ,  $C(2; 9; 1)$ . Унаслідок паралельного перенесення вершина  $D$  переходить у точку  $(2; 2; 5)$ . У яку точку переходить центр симетрії паралелограма?
9. Відомо, що  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Знайдіть  $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$ .
10. Сфера проходить через середини трьох ребер куба, які містять цю вершину, і через вершину куба, протилежну першій. Знайдіть радіус сфери, якщо ребро куба дорівнює 20.

### Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

.....  
 .....  
 .....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....  
 .....  
 .....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

.....

.....

### **Можливі теми проєктів**

- 1.** Вектори у фізиці.
- 2.** Навігація та GPS: координати і вектори в реальному житті.
- 3.** Інфографіка: як розв'язати задачу координатно-векторним методом.
- 4.** Мапа задач: одна задача — кілька способів розв'язання.
- 5.** Координатна модель органів тіла людини.
- 6.** Вектори навколо нас.







