

11

Тема 5.

Координати, вектори та геометричні фігури у тривимірному просторі

Урок 7. Урок–практикум. Розв’язування задач

План уроку

1. Розв’язування задач на доведення.
2. Розв’язування задач на обчислення.
3. Розв’язування практичних завдань.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає дані, потрібні для розв’язання проблемної ситуації [12 МАО 1.2.3-1];

розрізняє форми подачі інформації математичного змісту (текст, графік, аудіо, відео тощо) [12 МАО 2.1.1-1];

досліджує та доводить математичні твердження [12 МАО 4.1.2-2];

самостійно та у співпраці з іншими добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв’язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-2];

застосовує визначену послідовність дій для розв’язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1-3].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової активності наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Заплануйте розв’язання практичної задачі. Об’єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв’язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

6) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

9) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1. Як інженери використовують вектори, щоб розрахувати траєкторії руху літаків?
2. Як GPS-навігатори в телефонах визначають місцезнаходження людини та напрямки її руху?
3. Чи важливо інженерам-проектувальникам перевіряти належність чотирьох точок одній площині?
4. Чому для правильної побудови 3D-графічних зображень важливо знати кут між векторами?
5. Чи можна за координатами векторів визначити їхнє розташування в одній площині?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Запишіть рівняння сфери, всі точки якої рівновіддалені від початку координат на 2 одиниці.
Відповідь. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
2. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 2; 2)$.
Відповідь. $y - z = 0$.
3. Чи належить точка $(1; -2; 3)$ сфері з центром $O(1; -2; 6)$ і з радіусом 3?
Відповідь. Так.
4. Запишіть координати центра сфери та її радіус, якщо сферу задано рівнянням $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 2,25$.
Відповідь. $(1; 0; -2)$; 1,5.

Як я вирішую певну проблему?

- Задача 1.** Архітектор проектує скляний навіс, який має бути закріплений на трьох металевих опорах, розміщених у точках з координатами $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$.
- 1) Як архітектору знайти рівняння площини, в якій буде розміщена поверхня навісу?
 - 2) Перевірте, чи буде точка $D(1; 1; 1)$ належати цій площині.

III. Розв'язування задач на доведення (5–8 хв)

Векторно-координатний метод застосовують при доведенні властивостей геометричних фігур.

Алгоритм розв'язування задач векторно-координатним методом

1. Уведіть систему координат.
Вибирайте початок системи координат і напрямки осей так, щоб координати точок були якомога простішими.
2. Запишіть координати всіх точок у вибраній системі координат.
3. Уведіть вектори.
Запишіть вектори через координати точок.
Наприклад, якщо $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.
4. Використовуйте властивості векторів, умови колінеарності та перпендикулярності векторів.

Ілюстративний приклад

5. Доведіть, якщо медіана трикутника перпендикулярна до сторони, до якої вона проведена, то трикутник — рівнобедрений.

Доведення. 1) Розмістимо трикутник ABC у системі координат так, щоб медіана AM лежала на осі y , а точка M збігалася з початком системи координат. Тоді точки A і M матимуть координати: $A(0; a; 0)$, $M(0; 0; 0)$.

2) Оскільки точка M — середина BC , а медіана AM перпендикулярна до сторони BC , то відрізок BC перпендикулярний до осі y , тобто, паралельний площині xz .

Запишемо координати точок B і C : $B(-b; 0; c)$ та $C(b; 0; -c)$.

Виконаємо перевірку. Оскільки точка M — середина BC , то координати точки:

$$x_M = \frac{-b+b}{2} = 0, \quad y_M = \frac{0+0}{2} = 0, \quad z_M = \frac{c-c}{2} = 0.$$

Таким чином, координати точок B і C вибрано правильно.

3) Порівняємо квадрати довжин сторін AB та AC :

$$AB^2 = (-b - 0)^2 + (0 - a)^2 + (c - 0)^2 = b^2 + a^2 + c^2,$$

$$AC^2 = (b - 0)^2 + (0 - a)^2 + (-c - 0)^2 = b^2 + a^2 + c^2.$$

Оскільки $AB^2 = AC^2$, то $AB = AC$. Тобто довжини сторін AB і AC — рівні.

Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

IV. Розв'язування задач на обчислення

Векторно-координатний метод застосовують при обчисленні довжин відрізків, кутів між прямими та площинами, площ фігур тощо.

Відповідність між геометричними твердженнями та властивостями векторів

1. Якщо прямі паралельні, $a \parallel b$, тоді вектори колінеарні: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.
2. Точка C належить прямій AB , тоді $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$.
3. Якщо прямі перпендикулярні, то скалярний добуток векторів дорівнює 0, за умови, що вектори ненульові, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
4. Кут між прямими дорівнює куту між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, побудованими на прямих:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Ілюстративні приклади (8–10 хв)

6. З'ясуйте, чи лежать точки $A(1; 2; -1)$, $B(3; 1; 0)$, $C(-1; 3; -2)$ на одній прямій.

Розв'язання. 1) Запишемо координати векторів, що мають спільний початок, наприклад, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}: (3 - 1; 1 - 2; 0 - (-1)) = (2; -1; 1)$, отже, $\overrightarrow{AB}(2; -1; 1)$.

$\overrightarrow{AC}: (-1 - 1; 3 - 2; -2 - (-1)) = (-2; 1; -1)$, отже, $\overrightarrow{AC}(-2; 1; -1)$.

2) Точки лежать на одній прямій, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ — колінеарні. Тобто, їхні координати пропорційні:

$$2 : (-2) = -1, -1 : 1 = -1, 1 : (-1) = -1.$$

Оскільки всі три відношення відповідних координат векторів рівні, то вектори — колінеарні.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$, то вектори лежать на одній прямій.

Отже, точки A , B , C лежать на одній прямій.

Відповідь. Так.

7. Знайдіть площу трикутника з вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$.

Розв'язання. 1) Обчислимо довжини сторін трикутника:

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14},$$

$$|BC| = \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2},$$

$$|AC| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}.$$

Оскільки $AB = AC$, то трикутник — рівнобедрений.

2) Використаємо формулу Герона:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2\sqrt{14}+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{14} + \sqrt{2} \text{ — півпериметр трикутника,}$$

$$S = \sqrt{(\sqrt{14} + \sqrt{2})(\sqrt{14} + \sqrt{2} - \sqrt{14})(\sqrt{14} + \sqrt{2} - \sqrt{14})(\sqrt{14} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2})} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{14} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{14} - \sqrt{2})} = \sqrt{(14-2) \cdot 2} = 2\sqrt{6} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь. $2\sqrt{6}$ кв. од.

8. Знайдіть кут між мимобіжними прямими AC_1 і CB_1 , якщо три ребра куба лежать на координатних осях.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок). Уздовж ребер куба AB , BC і BB_1 проведемо координатні осі x , y і z відповідно. Нехай ребро куба дорівнює a . Тоді точки, які є кінцями відрізків AC_1 і CB_1 мають координати: $A(a; 0; 0)$, $C_1(0; a; a)$, $C(0; a; 0)$, $B_1(0; 0; a)$.

Знайдемо координати векторів AC_1 і CB_1 :

$$\overrightarrow{AC_1}(0 - a; a - 0; a - 0) = (-a; a; a),$$

$$\overrightarrow{CB_1}(0 - 0; 0 - a; a - 0) = (0; -a; a).$$

Знайдемо довжини цих векторів:

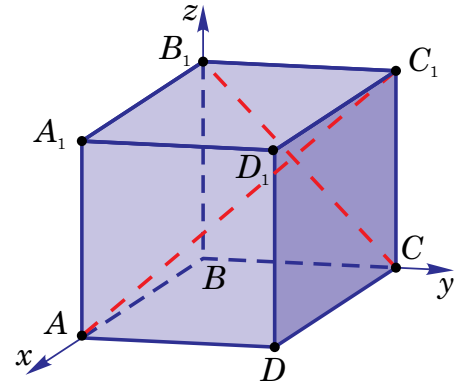
$$|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a, \quad |\overrightarrow{CB_1}| = \sqrt{0^2 + (-a)^2 + a^2} = \sqrt{2}a.$$

Обчислимо косинус кута між векторами AC_1 і CB_1 :

$$\cos \angle(\overrightarrow{AC_1}; \overrightarrow{CB_1}) = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{AC_1}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|} = \frac{-a \cdot 0 + a \cdot (-a) + a \cdot a}{\sqrt{3}a \cdot \sqrt{2}a} = \frac{-a^2 + a^2}{\sqrt{6}a^2} = 0.$$

Оскільки косинус кута між векторами дорівнює 0, то вектори — перпендикулярні. Отже, кут між мимобіжними прямими AC_1 і CB_1 дорівнює 90° .

Відповідь. 90° .



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Архітектор проектує скляний навіс, який має бути закріплений на трьох металевих опорах, розміщених у точках з координатами $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$.

1) Як архітектору знайти рівняння площини, в якій буде розміщена поверхня навісу?

2) Перевірте, чи буде точка $D(1; 1; 1)$ належати цій площині.

Розв'язання.

1) Загальне рівняння площини у просторі має вигляд $Ax + By + Cz + D = 0$.

Визначимо коефіцієнти A , B , C .

Оскільки відомо, що навіс закріплений на опорах в точках $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$,

$$C(0; 0; 4), \text{ то складемо систему рівнянь: } \begin{cases} 2A + D = 0, \\ 3B + D = 0, \\ 4C + D = 0. \end{cases}$$

$$\text{Із кожного рівняння системи виразимо } D: \begin{cases} D = -2A, \\ D = -3B, \\ D = -4C. \end{cases}$$

Прирівняємо праві частини виразів: $2A = 3B$, $2A = 4C$ або $A = 2C$.

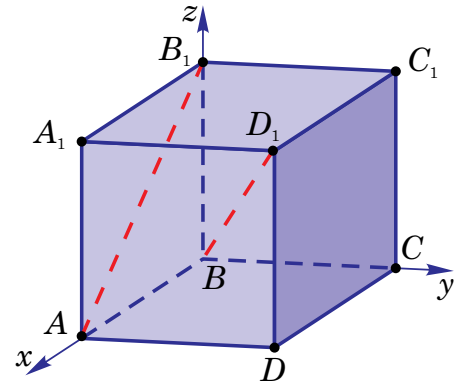
Якщо числу A надавати певні значення, то можна обчислити числа B і C .

Нехай $A = 6$, тоді $B = 4$, $C = 3$. Звідси, $D = -12$.

Тоді, рівняння площини: $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Відповідь. 1) $6x + 4y + 3z - 12 = 0$; 2) Ні.

4. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у якого $AB = 4$, $AD = 5$, $AA_1 = 3$. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{A_1 C}$ і $\overrightarrow{BD}$.
5. Знайдіть кут між мимобіжними прямими BD_1 і AB_1 , якщо три ребра куба лежать на координатних осях (див. рисунок).



6. На ребрі AD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взято точку M так, що $AM : MD = 1 : 2$. На ребрі $B_1 C_1$ взято точку N — середину ребра. Знайдіть довжину відрізка MN , якщо довжина ребра куба дорівнює 6.
7. Дано точки $M(2; -4; 6)$ і $N(-1; 5; -3)$. У якій точці пряма MN перетинає площину yz ?
8. Знайдіть точку перетину площини $x + 2y - z + 4 = 0$ з прямою, яка проходить через точки $A(1; 3; -2)$ і $B(3; -1; 4)$.
9. Знайдіть площу трикутника з вершинами $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$.
10. Знайдіть радіус і координати центра сфери $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y = 26$.

Рівень С

1. За допомогою векторів доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
2. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром, яке дорівнює a . За допомогою векторів визначте кут між мимобіжними прямими $A_1 C$ і BD_1 .
3. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка P є серединою ребра $A_1 B_1$, а точка Q належить ребру DD_1 . При цьому $D_1 Q : QD = 1 : 2$. Знайдіть кут між прямою PQ і діагоналлю AC_1 .
4. Усі грані паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — рівні ромби, $AB = a$, $\angle BAD = 60^\circ$. Знайдіть довжину діагоналі AC_1 .
5. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки: $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 4; -1)$, $C(2; -4; 5)$.
6. Знайдіть координати точки перетину прямої AB з віссю аплікат, якщо $A(2; 6; 7)$, $B(-1; -3; 1)$.
7. Через точку $A(-12; 3; -4)$, яка належить сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведено площину, перпендикулярну до осі абсцис. Знайдіть довжину кола, утвореного в перерізі.
8. Три вершини паралелограма $ABCD$ мають координати $A(0; -1; 9)$, $B(3; 8; 4)$, $C(2; 9; 1)$. Унаслідок паралельного перенесення вершина D переходить у точку $(2; 2; 5)$. У яку точку переходить центр симетрії паралелограма?
9. Відомо, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Знайдіть $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.
10. Сфера проходить через середини трьох ребер куба, які містять цю вершину, і через вершину куба, протилежну першій. Знайдіть радіус сфери, якщо ребро куба дорівнює 20.

VI. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

.....
.....
.....

(–) що залишилося незрозумілим:

.....
.....
.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....
.....
.....

Можливі теми учнівських проєктів

1. Вектори у фізиці.
2. Навігація та GPS: координати і вектори в реальному житті.
3. Інфографіка: як розв'язати задачу координатно-векторним методом.
4. Мапа задач: одна задача — кілька способів розв'язання.
5. Координатна модель органів тіла людини.
6. Вектори навколо нас.