

Тема 1.

**Повторення. Числові множини.
Тотожні перетворення
раціональних, ірраціональних,
тригонометричних
та логарифмічних виразів****Урок 1. Числові множини. Модуль числа****РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви вдосконалили навички:

- 1) розрізняти числові множини;
- 2) наводити приклади чисел із різних числових множин;
- 3) формулювати означення модуля та застосовувати модуль;
- 4) розв'язувати практичні задачі з теми.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $(x - 2)^4 = 10000$.
2. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{2x - x^2} + \frac{3}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$.
3. Подайте числовий вираз $19 - 6\sqrt{10}$ як квадрат двочлена.
4. Спростіть вираз $\frac{\sin(\pi - \alpha)\sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$.
5. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{27}{4 - \sqrt{7}}$.

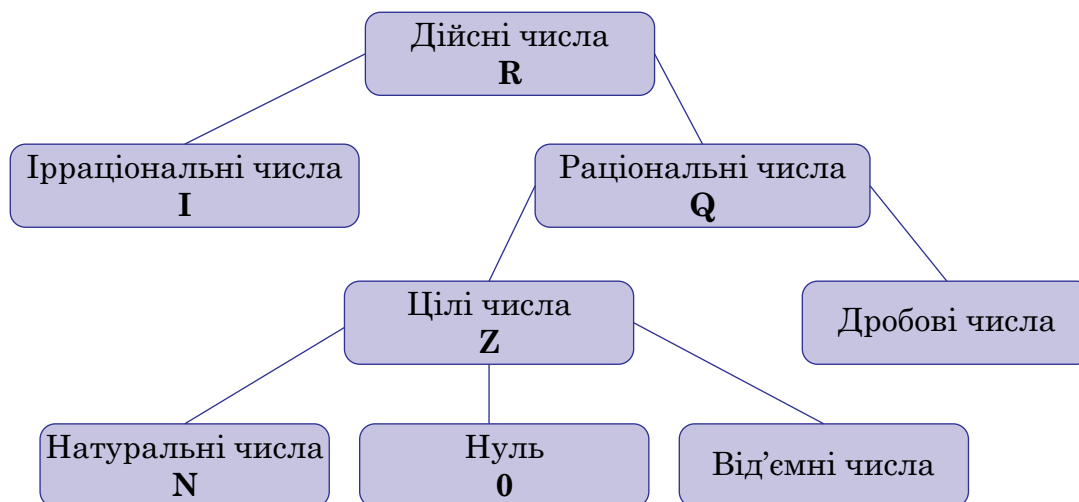
III. Класифікація числових множин

У розмовній мові для сукупностей різноманітних об'єктів уживаються назви: *зібрання* людей, *ключ* журавлів, *зграя* вовків, *стадо* корів, *колона* машин, *купа* каміння, *набір* олівців тощо. Усі ці слова (*зібрання*, *ключ*, *зграя*, *стадо*, *колона*, *купа*, *набір*) різні, але з математичної точки зору вони є одним і тим же математичним поняттям, яке назвали *множиною*.

Поняття множини належить до первісних понять, воно не означається.

Множина — це сукупність, зібрання деяких однорідних об'єктів будь-якої природи.

На наведеній схемі структуровано числові множини.



Означення числових множин подано в таблиці (див. таблицю).

Натуральні числа	Числа, які виникають природним чином при лічбі предметів. Наприклад: 1, 2, 3, 4, ..., 999, ...
Цілі числа	Множина чисел, що складається з множини натуральних чисел, нуля та від'ємних чисел (протилежних до натуральних). Наприклад: -55; -10; -2; 0; 5; 99.
Раціональні числа	Множина нескоротних дробів вигляду $\frac{m}{n}$ із цілим чисельником m та натуральним знаменником n . Наприклад: $\frac{6}{7}$; 0,1; $9\frac{1}{2}$.
Ірраціональні числа	Числа, що не є раціональними (не можуть бути виражені відношенням цілого та натурального чисел). Мають вигляд нескінченних десяткових дробів. Наприклад: $\sqrt{2}$, $\sqrt{125}$, π .
Дійсні числа	Множина, що складається з раціональних та ірраціональних чисел. Наприклад: 1; -2; 0; $\frac{6}{7}$; $\sqrt{125}$, π ...



Покликання: <https://youtu.be/VHVF6GBUgOQ?si=5eZXrOcCDiaTLkgE> _____

Корисна інформація. Як без калькулятора обчислити наближене значення ірраціонального числа?

Стародавні вавилоняни близько 4000 років тому вміли обчислювати сторону квадрата, площа якого дорівнювала S . Вони склали таблицю квадратів чисел та квадратних коренів із чисел, використавши для цього метод наближеного добування квадратного кореня з числа S , що не є квадратом натурального числа. Вавилоняни записували число S у вигляді $a^2 + b$, де b — досить мале число в порівнянні з a^2 , і використовували формулу $\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$.

Запропонований метод наближеного обчислення квадратного кореня використовувався також у Стародавній Греції і був детально описаним математиком і винахідником Героном Александрійським.

Приклад 1. Обчисліть $\sqrt{102}$ методом наближеного обчислення і виконайте перевірку.

Розв'язання. $\sqrt{102} = \sqrt{100 + 2} = \sqrt{10^2 + 2}$, тоді, за формулою $\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$,

маємо: $\sqrt{102} \approx 10 + \frac{2}{2 \cdot 10} = 10,1$.

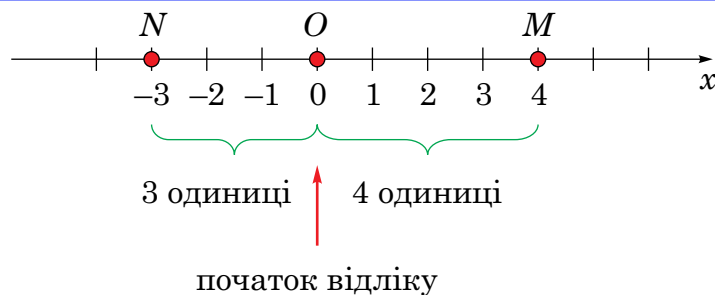
Справді, $(10,1)^2 = 102,01 \approx 102$.

Відповідь. $\approx 10,1$.

Примітка. Методом наближеного обчислення квадратного кореня можна скористатись при складанні іспитів ЗНО/НМТ і не тільки.

IV. Модуль числа. Геометричний зміст модуля

Означення. Модулем числа називають відстань від початку відріку до точки, що відповідає цьому числу на координатній прямій.



Розглянемо геометричну інтерпретацію (див. рисунок).

Точка N має на числовій прямій координату -3 , тому відстань від N до O дорівнює $|-3|$, тобто $NO = |-3| = 3$. Точка M має координату 4 , тому $OM = |4| = 4$.

Практична формула розкривання модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0; \end{cases} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Щоб розкрити модуль, потрібно відповісти на запитання: який знак мають число, буква або вираз, що знаходяться під модулем?

- Якщо число, буква або вираз додатні, то модуль відкидаємо, а число, букву або вираз переписуємо без змін (перший рядок формули).
- Якщо число, буква або вираз від'ємні, то модуль також відкидаємо, однак перед числом, буквою або виразом ставимо знак мінус (другий рядок формули). Таким чином, від'ємні числа (букви, вирази) перетворюємо в додатні. При цьому число або вираз беремо в дужки.

Наприклад: $|2| = 2$, оскільки $2 > 0$;

$|-5| = -(-5) = 5$, оскільки $-5 < 0$;

$|\sqrt{2} - 5| = -(\sqrt{2} - 5) = 5 - \sqrt{2}$, оскільки $\sqrt{2} - 5 < 0$.

Проте, оскільки модуль – це відстань, яка набуває завжди додатних значень або 0, то можна відразу записувати так $|-5| = 5$. Тобто відстань від числа -5 до 0 дорівнює 5.

Саме так будемо записувати вирази, коли обчислюватимемо значення числових виразів із модулями.

Відеоурок «Модуль числа»

Покликання: <https://youtu.be/wufQwyQ08Io?si=64y374O4ARjS3qCd> _____



Приклад 2. Обчисліть значення виразу $(|-8,4| - |5,6|) : |-0,5|$.

Розв'язання. $(|-8,4| - |5,6|) : |-0,5| = (8,4 - 5,6) : 0,5 = 2,8 : 0,5 = 5,6$.

Відповідь. 5,6.

Приклад 3. Обчисліть добуток коренів рівняння $|2 - |x - 2|| = 3$.

Розв'язання. $2 - |x - 2| = 3$ або $2 - |x - 2| = -3$, $|x - 2| = -1$ — коренів немає.

$|x - 2| = 5$, тоді $x = -3$ або $x = 7$. Добуток коренів становить -21 .

Відповідь. -21 .

V. Спрощення виразів із модулями

Алгоритм розкривання декількох модулів (метод інтервалів)

1. Знайдіть нулі підмодульних виразів (або виразу). Для цього прирівняйте до 0 вирази (або вираз).
2. Знайдені нулі ділять числову вісь на проміжки, на кожному з яких вираз під модулем має сталий знак (додатний або від'ємний).
3. На кожному з проміжків модулі можна розкрити так:
 - якщо вираз невід'ємний — залишаємо його незмінним,

- якщо вираз від'ємний, то беремо його з протилежним знаком, тобто перед виразом ставимо знак «-».

Приклад 4. Спростіть вираз $|x+3|+|x-3|$.

Розв'язання. Якщо $x < -3$, то $|x+3|+|x-3| = -(x+3)-(x-3) = -x-3-x+3 = -2x$.

Якщо $-3 \leq x \leq 3$, то $|x+3|+|x-3| = x+3-(x-3) = x+3-x+3 = 6$.

Якщо $x > 3$, то $|x+3|+|x-3| = (x+3)+(x-3) = x+3+x-3 = 2x$.

$$\text{Отже, } |x+3|+|x-3| = \begin{cases} -2x, & x < -3, \\ 6, & -3 \leq x \leq 3, \\ 2x, & x > 3. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь. } \begin{cases} -2x, & x < -3, \\ 6, & -3 \leq x \leq 3, \\ 2x, & x > 3. \end{cases}$$

VI. Розв'язування практичних задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Повна вартість доставки великогабаритних меблів у фірмі з перевезень складається з вартості їхньої доставки на перший поверх будинку та з вартості підйому меблів на потрібний поверх. Вартість підйому меблів на кожен наступний поверх перевищує вартість їхнього підйому на попередній на одну й ту саму кількість гривень. Визначте повну вартість (у гривнях) доставки меблів на 11-й поверх будинку, якщо повна вартість доставки меблів на четвертий та сьомий поверхи цього будинку становить 1420 грн та 1540 грн відповідно.

Задача 2. Шкільна бібліотека щомісяця має ліміт витрат 2000 грн на придбання сучасної літератури. Кошти, що перевищують цю суму, доводиться брати в короткостроковий кредит під 15 % на той самий місяць. Протягом чотирьох місяців від початку року витрати становили 2180 грн, 1890 грн, 2020 грн, 2350 грн.

- 1) Запишіть формулу для обчислення абсолютного відхилення від норми і знайдіть відхилення для кожного місяця.
- 2) Обчисліть суму кредиту для кожного місяця.
- 3) Знайдіть загальні витрати за чотири місяці.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Які з чисел -100 ; $-14,5$; -2 ; $-\frac{2}{3}$; 0 ; $\sqrt{121}$; 10 ; 15 ; $27\frac{1}{6}$; $\frac{42}{7}$; $\sqrt{12}$ є:

- 1) натуральними;
- 2) цілими;
- 3) раціональними?

2. Серед чисел: $\frac{1}{7}$; 0 ; 25 ; $-2,(3)$; $4,2(51)$; 217 ; π ; e назвіть раціональні та ірраціональні числа.

3. Порівняйте:

- 1) 2,(36) і 2,366; 2) $-5,42$ і $-5,(42)$; 3) $-0,228$ і $-\frac{5}{22}$; 4) $-3,(14)$ і $-\pi$.

4. Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{|x|} = 3$. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$-12; 12$	$-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}$

5. Розв'яжіть рівняння $\frac{|x|}{10} = 2$. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$-5; 5$	$-20; 20$	20	5	$-0,2; 0,2$

6. Розв'яжіть рівняння $|2x - 1| = 6$. (ЗНО, 2016 р.).

А	Б	В	Г	Д
$-3,5; 3,5$	$-2,5; 2,5$	$-3,5; 2,5$	$-2,5; 3,5$	$3,5$

7. Петро і Сергій збирали яблука. Сергій зібрав яблук у 5 разів більше, ніж Петро. Яку частину всіх яблук зібрав Петро? (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$

8. Якому проміжку належить число $\sqrt[3]{18}$? (ЗНО, 2016 р.).

А	Б	В	Г	Д
$[0; 1]$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$	$[4; +\infty)$

9. Доберіть до запитання (1–4) правильну відповідь (А–Д). (ЗНО, 2015 р.).

Запитання

- 1) Яке число є дільником 8?
- 2) Яке число є простим?
- 3) Яке число є квадратом натурального числа?
- 4) Яке число кратне 7?

Відповідь

- А 8
Б 16
В 17
Г 24
Д 56

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

10. Чи правильно, що:

- 1) будь-яке натуральне число є цілим;
- 2) будь-яке ціле число є натуральним;
- 3) будь-яке ціле число є раціональним;
- 4) будь-яке раціональне число є цілим?

- 11.** Чи правильно, що:
- 1) кожне раціональне число є дійсним;
 - 2) кожне дійсне число є раціональним;
 - 3) кожне ірраціональне число є дійсним;
 - 4) кожне дійсне число є ірраціональним?

- 12.** Знайдіть суму коренів рівняння:

- 1) $|x + 5| = 7$;
- 2) $|2x - 1| = 5$;
- 3) $|x + 7| = 2$;
- 4) $|4x - 8| + |2 - x| = 4$;
- 5) $2|x - 3| - |3 - x| = 5$;
- 6) $5|x - 4| - 2|4 - x| = 4$.

Рівень В

- 1.** Подайте у вигляді десяткового дробу число:

- 1) $\frac{5}{3}$;
- 2) $\frac{7}{30}$;
- 3) $\frac{3}{7}$;
- 4) $-\frac{20}{9}$.

- 2.** Укажіть усі множини, до яких належить кожне число: 5 ; -7 ; $\frac{3}{4}$; 0 ; $\sqrt{16}$; $\sqrt{2}$; π ;
 $-\frac{22}{7}$.

- 3.** Які з наведених чисел є раціональними:

- 1) $a = \sqrt{6,4}$;
- 2) $b = \pi$;
- 3) $c = \sqrt{6,25}$?

- 4.** Спростіть вираз:

- 1) $|3x| + |2x|$;
- 2) $|3x| - |x|$.

- 5.** Якщо $a \in (-2; 3)$, то $|a^2 - a - 6| = \dots$ (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$a^2 - a - 6$	$a^2 + a - 6$	$a^2 + a + 6$	$-a^2 + a + 6$	$-a^2 - a + 6$

- 6.** Укажіть правильну нерівність, якщо $a = 5\sqrt{2}$, $b = 7$, $c = \sqrt{51}$.

А	Б	В	Г	Д
$b < a < c$	$a < b < c$	$c < a < b$	$a < c < b$	$b < c < a$

- 7.** Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та проміжком (А–Д), якому належить його значення. (ЗНО, 2016 р.).

Числовий вираз

1 $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

2 $8^{\frac{2}{3}}$

3 $\log_{\frac{1}{2}} 10$

4 $\left|\frac{1}{2} - 2\right|$

Проміжок

А $(-\infty; -3)$

Б $[-3; 0)$

В $[0; 1)$

Г $[1; 3)$

Д $[3; +\infty)$

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

- 8.** Знайдіть корінь рівняння у заданому проміжку:
- 1) $|x-1|-|x+2|=1, x \in (-2; 1);$ 2) $|x-3|-|1-x|=1, x \in (1; 3);$
 3) $|1-x|+|3+x|=6,2, x \in (-\infty; -3);$ 4) $|x-3|-|2-x|=-0,4, x \in (2; 3).$
- 9.** Знайдіть найбільший корінь рівняння:
- 1) $|2-3x|=x+3;$ 2) $|4-2x|+x=2,6;$
 3) $|2-5x|-x=1,2;$ 4) $|3-2x|=x-0,9.$
- 10.** Визначте суму коренів рівняння:
- 1) $|x+2|-1=4;$ 2) $|x-3|-5=2;$ 3) $|x-1|-3=2.$

Рівень С

- 1.** Запишіть множину:
- 1) цілих розв'язків нерівності $x^2 - 25 \leq 0;$
 2) цілих розв'язків нерівності $\frac{16}{x^2} > 1;$
 3) натуральних розв'язків нерівності $x^2 - 2x \leq 0.$
- 2.** Перелічіть елементи множини A , яка задана характеристичною властивістю:
 $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}; \sqrt{16+x^2} \leq 4\}.$
- 3.** Якій числовій множині належить значення виразу:
- 1) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2};$ 2) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}?$
- 4.** Обчисліть:
- 1) $\left(\sqrt{(0,5-\sqrt{2})^2} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}\right)^2;$ 2) $\sqrt{27+10\sqrt{2}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}.$
- 5.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $\sqrt{x-3}+|x^2-9|=0;$ 2) $\sqrt{2x-3}+|4x^2-9|=0;$ 3) $|x^5-2x|+\sqrt{x-2}=0.$
- 6.** Визначте суму $x+y$, якщо:
- 1) $|x-y|+|4-x|=0;$ 2) $|2x-y|+2|2-x|=0.$
- 7.** Обчисліть добуток xu , якщо:
- 1) $|x-2|+4x^2-4xu+y^2=0;$ 2) $|y-1|+x^2-2xu+y^2=0.$
- 8.** Знайдіть найменший корінь рівняння:
- 1) $\sqrt{-x}=x-|x|;$ 2) $\sqrt{-x}=|x-|x||.$
- 9.** Визначте суму коренів рівняння:
- 1) $\sqrt{4-x}+1=|2x-9|;$ 2) $\sqrt{(x-1)^2(x-5)}=|x-1|\sqrt{25-x^2}.$
- 10.** Знайдіть найбільше значення параметра a , при якому рівняння має розв'язок:
- 1) $|2x-1|=1-4a;$ 2) $|3x+2|=3-4a.$

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася або у вас усе ще залишилися запитання.







