

Тема 1.

Повторення. Числові множини. Тотожні перетворення раціональних, ірраціональних, тригонометричних та логарифмічних виразів

Урок 2. Пропорції. Відсотки

План уроку

1. Пропорції.
2. Пропорційний поділ.
3. Розв'язування задач практичного змісту на пропорції та пропорційний поділ.
4. Відсотки.
5. Формула складних відсотків.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки комплексних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2–1];

розпізнає неповну і надлишкову інформацію, маніпулювання даними, визначає надійність джерел [12 МАО 1.2.1–2];

розрізняє форми подачі інформації математичного змісту (текст, графік, аудіо, відео тощо) [12 МАО 2.1.1–1];

упорядковує інформацію математичного змісту [12 МАО 2.1.3–1];

визначає, аналізує й узагальнює зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу [12 МАО 4.1.1–1];

досліджує та доводить математичні твердження [12 МАО 4.1.2–2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

- 3) Сформулюйте практичну задачу (або задачі). Розв'язання задачі (задач) пропонуємо у вигляді групової активності наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Якщо ви вирішите застосувати диференційований підхід під час групової роботи, скористайтесь запропонованими задачами двох рівнів складності.
- 7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Як правильно порахувати знижку на товар?
- 2) Як визначити кількість діючої речовини у медичному препараті за його концентрацією?
- 3) Чи використовують в економіці складні відсотки?
- 4) Як показати, що одна фізична або математична величина більша за іншу?
- 5) Як аналізувати прибутки приватного підприємця у порівнянні з різними часовими періодами?
- 6) Як визначити маси складових у сплавах, чи в розчинах?
- 7) Як застосовувати пропорції і відсотки у практичних задачах?

II. Повторення (3–5 хв)

1. Знайдіть відношення 2 кг до 2 ц.
Відповідь. 0,01.
2. Замініть відношення дробових чисел $2,4 : 0,6$ відношенням цілих чисел.
Відповідь. $4 : 1$.
3. Обчисліть суму розв'язків нерівності $12 \leq x \leq 72$, які кратні 9.
Відповідь. 315.

4. Обчисліть різницю найбільшого і найменшого цілих значень x , при яких нерівність $2\frac{5}{7} < \frac{x}{7} \leq 3\frac{1}{7}$ буде правильною.
Відповідь. 2.
5. Обчисліть середнє арифметичне величин 2 м, 2 дм, 2 см і 2 мм.
Відповідь. 555,5 мм.

Як я вирішую певну проблему?

- Задача 1.** У магазині молодіжного одягу діє акція: при покупці будь-яких двох однакових футболок за одну платять на 40% менше, ніж за іншу. За дві однакові футболки, придбані в цьому магазині під час акції, Микола заплатив 200 грн. Скільки гривень заплатить Микола, якщо він купить лише одну таку футболку? (ЗНО, 2013 р.).
- Задача 2.** Банк приймає кошти на депозитний рахунок під 32% річних, але відсотки нараховуються щомісячно. Із нарахованої суми береться податок у розмірі 25%. Сума, що залишилась після цього, додається до початкової суми на депозитному рахунку і так щомісяця. На скільки відсотків збільшиться початкова сума через 8 місяців? Відповідь округліть до цілих чисел.

III. Пропорції (5 хв)

Скоротимо дріб $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ і отримаємо рівність, яку називають пропорцією.

Означення. Рівність двох відношень називається **пропорцією**, тобто

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ або } a : b = c : d.$$

Означення. Числа a, b, c, d називаються **членами пропорції**, при цьому a і d — **крайні члени** пропорції, b і c — **середні члени** пропорції.

Основна властивість пропорції. Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх членів пропорції: $ad = bc$, $bd \neq 0$.

Оскільки $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, то $3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$, $6 = 6$.

Основна властивість пропорції допомагає:

- у формулах виражати одну величину через інші;
- знаходити невідому величину з фізичної залежності (формули);
- розв'язувати задачі на пропорційний поділ тощо.

Ілюстративні приклади

6. Знайдіть невідомий член пропорції $2\frac{6}{7} : 1\frac{9}{16} = 1\frac{1}{7} : x$.

Розв'язання. Перетворимо мішані числа в неправильні дроби: $\frac{20}{7} : \frac{25}{16} = \frac{8}{7} : x$.

Використаємо основну властивість пропорції:

$$\frac{20}{7} \cdot x = \frac{8}{7} \cdot \frac{25}{16}, \quad x = \frac{25}{14} \cdot \frac{7}{20}, \quad x = \frac{5}{8}.$$

Відповідь. $\frac{5}{8}$.

7. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x+3}{8} = \frac{9}{10}$.

Розв'язання. Використаємо основну властивість пропорції:

$$10(2x+3) = 8 \cdot 9, \quad 20x+30 = 72, \quad 20x = 42, \quad x = 2,1.$$

Відповідь. 2,1.

IV. Пропорційний поділ. Розв'язування задач практичного змісту на пропорції та пропорційний поділ

Якщо в задачі потрібно поділити число або значення певної величини в даному відношенні, тобто на частини, пропорційні деяким числам, то таку задачу називають задачею на пропорційний поділ.

Наприклад, якщо число або значення величини потрібно поділити на три частини пропорційно числам 2, 3 і 4, то кажуть, що число або значення величини потрібно поділити у відношенні 2 : 3 : 4.

Алгоритм розв'язання задач на пропорційний поділ величин (чисел)

- 1) Запишіть пропорцію або відношення частин від величини (числа).
- 2) Знайдіть суму членів відношення.
- 3) Поділіть загальну величину на суму членів відношення — отримаєте значення однієї частини від величини (числа).
- 4) Помножте отримане значення на кожен член відношення, щоб знайти кожную частину.

Ілюстративні приклади

- 8.** Подайте число 200 у вигляді суми чисел x , y і z так, щоб $x : y = 2 : 3$ і $y : z = 7 : 5$.

Розв'язання. Відношення двох чисел не змінюється, якщо кожен член відношення помножити (поділити) на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Оскільки $x : y = 2 : 3 = 14 : 21$ і $y : z = 7 : 5 = 21 : 15$, то $x : y : z = 14 : 21 : 15$.

$$\text{Тоді } 14 \cdot \frac{200}{14+21+15} = 56, \quad 21 \cdot \frac{200}{14+21+15} = 84, \quad 15 \cdot \frac{200}{14+21+15} = 60.$$

Отже, $200 = 56 + 84 + 60$.

Відповідь. $200 = 56 + 84 + 60$.

- 9.** У торговій крамниці є три приміщення: склад, торговий зал і офіс адміністрації, які освітлюються відповідно двома, п'ятьма і трьома лампами однакової потужності. За місяць усією мережею освітлення спожито 720 кВт/год електроенергії. Відомо, що лампи у всіх приміщеннях горіли однакову кількість годин. На скільки кВт/год електроенергії більше спожито в торговому залі, ніж на складі за цей місяць?

Розв'язання. Загальна кількість ламп становить 10.

Тоді $720 : 10 = 72$ (кВт/год) — спожито однією лампою.

Різниця кількості ламп в торговому залі та на складі дорівнює 3.
Тоді $72 \cdot 3 = 216$ (кВт/год) — різниця споживання електроенергії.
Відповідь. На 216 кВт/год.

V. Відсотки

Означення. Відсотком називають одну соту частину і позначають 1%.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01.$$

100% деякої величини становить сама величина.

Будь-яке раціональне число можна записати у відсотках.

Наприклад: $0,43 = \frac{43}{100} = 43\%$, $2,3 = \frac{230}{100} = 230\%$.

Будь-яке раціональне число відсотків можна подати у вигляді десяткового дробу.

Наприклад: $32\% = \frac{32}{100} = 0,32$, $7\% = \frac{7}{100} = 0,07$.

Основні типи задач на відсотки	Ілюстративні приклади
I. Знаходження відсотка від числа. Щоб знайти відсоток від числа, треба: 1) відсоток перетворити у десятковий дріб; 2) число помножити на отриманий десятковий дріб.	10. Солодковершкове масло-екстра містить 82,5 % жиру. Скільки грамів жиру міститься в пачці масла з масою 180 г? <i>Розв'язання.</i> Оскільки $82,5\% = 0,825$, то $180 \cdot 0,825 = 148,5$ (г). <i>Відповідь.</i> 148,5 г.
II. Знаходження числа за його відсотком. Щоб знайти число за його відсотком, треба: 1) відсоток перетворити у десятковий дріб; 2) число поділити на отриманий десятковий дріб.	11. Під час сезонного розпродажу зі знижкою 30% ціна пари босоніжок становить 1400 грн. Якою була ціна за цю пару босоніжок до початку дії акції? <i>Розв'язання.</i> $100\% - 30\% = 70\%$ — становить нова ціна від початкової. Оскільки $70\% = 0,7$, то $1400 : 0,7 = 2000$ (грн). <i>Відповідь.</i> 2000 грн.
III. Знаходження відсоткового відношення двох чисел. Щоб знайти, скільки відсотків становить число a від числа b , потрібно: 1) число a поділити на число b ; 2) отриманий результат помножити на 100%.	12. Скільки відсотків від години становлять 45 секунд? <i>Розв'язання.</i> Оскільки 1 год = 3600 секунд, то $45 : 3600 \cdot 100\% = 1,25\%$. <i>Відповідь.</i> 1,25 %.

При розв'язуванні задач на відсотки часто використовують пропорції.

Ілюстративні приклади

- 13.** Завдяки раціональному розкрою тканини кравчині вдалося викроїти 15 деталей замість 12 деталей. Скільки відсотків економії тканини досягнуто при цьому?

Розв'язання.

Запишемо умову задачі в скороченому вигляді:

12 дет. — 100%;

15 дет. — $x\%$.

Складемо пропорцію: $\frac{12}{15} = \frac{100}{x}$.

За основною властивістю пропорції: $x = \frac{15 \cdot 100}{12} = 125\%$. Тоді $125\% - 100\% = 25\%$.

Відповідь. 25% економії.

- 14.** Три вантажівки перевозили вантажі. Перша вантажівка перевезла 40 % усього вантажу, друга — 75 % від вантажу, перевезеного першою, а третя — решту 36 т. Скільки тонн вантажу було перевезено трьома вантажівками разом?

Розв'язання. Обчислимо 75 % від 40 %. Оскільки $75\% = 0,75$, то $40\% \cdot 0,75 = 30\%$.

Отже, друга вантажівка перевезла 30 % від усього вантажу.

Тоді $100\% - (40\% + 30\%) = 30\%$ — перевезла третя вантажівка.

Обчислимо кількість усього перевезеного вантажу: $30\% = 0,3$, $36 : 0,3 = 120$ (тонн).

Відповідь. 120 т.

- 15.** Маємо шматок сплаву міді з оловом масою 12 кг, що містить 45% міді. Скільки чистого олова необхідно додати до цього шматка сплаву, щоб одержати новий сплав із вмістом міді 40%?

Розв'язання. Обчислимо кількість міді у сплаві. Оскільки $45\% = 0,45$, то $12 \cdot 0,45 = 5,4$ (кг) міді.

Кількість міді у сплаві при додаванні олова не зміниться, але буде становити вже $40\% = 0,4$ нового сплаву.

Тоді $5,4 : 0,4 = 13,5$ (кг) — маса нового сплаву.

$13,5 - 12 = 1,5$ (кг) — маса олова, якого необхідно додати до сплаву.

Відповідь. 1,5 кг.

VI. Формула складних відсотків (4–5 хв)

Означення. Якщо деяка величина збільшується на одну й ту ж кількість відсотків за кожний фіксований період часу, тоді зручно користуватись формулою простого відсоткового зростання: $A_t = A_0 \left(1 + \frac{pt}{100} \right)$, де A_t — деяка величина, яку одержимо після періоду часу t , $p\%$ — певні відсотки величини A_0 .

Формула $A_t = A_0 \left(1 - \frac{pt}{100} \right)$ — формула простого відсоткового спадання.

Означення. Якщо деяка величина змінюється поетапно, при цьому кожна її зміна становить певне число відсотків від значення на попередньому етапі, то вико-

ристовують формулу складних відсотків: $A_t = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, де A_t — деяка величина, яку одержимо після періоду часу t , p % — певні відсотки величини A_0 .

Ілюстративні приклади

- 16.** Банк виплачує вкладникам кожного місяця 2 % від суми, внесеної вкладником. Клієнт зробив вклад у розмірі 15000 грн. Яку кількість грошей матиме клієнт через півроку?

Розв'язання. За умовою, $A_0 = 15000$ грн, $t = 6$ місяців, $p = 2$ %.

За формулою простого відсоткового зростання: $A_t = A_0 \left(1 + \frac{pt}{100}\right)$,

$$A_6 = 15000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 6) = 15000 \cdot 1,12 = 16800 \text{ (грн)}.$$

Відповідь. 16800 грн.

Розв'яжемо попередню задачу за формулою складних відсотків.

- 17.** Банк виплачує вкладникам кожного місяця 2 % від суми, внесеної вкладником. Клієнт зробив вклад у розмірі 15000 грн. Яку кількість грошей матиме вкладник через півроку?

Розв'язання. За умовою, $A_0 = 15000$ грн, $t = 6$ місяців, $p = 2$ %.

За формулою складних відсотків: $A_t = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$,

$$A_t = 15000 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^6 = 15000 \cdot (1,02)^6 \approx 16892,44 \text{ (грн)}.$$

Відповідь. 16892,44 грн.

VIII. Розв'язування практичних задач. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

- Задача 1.** У магазині молодіжного одягу діє акція: при покупці будь-яких двох однакових футболок за одну платять на 40% менше, ніж за іншу. За дві однакові футболки, придбані в цьому магазині під час акції, Микола заплатив 200 грн. Скільки гривень заплатить Микола, якщо він купить лише одну таку футболку? (ЗНО, 2013 р.).

Розв'язання. За другу футболку Микола заплатить $100\% - 40\% = 60\%$ від початкової вартості.

За дві футболки: $100\% + 60\% = 160\% = 1,6$.

Тоді $200 : 1,6 = 125$ (грн) — ціна однієї футболки без знижки.

Відповідь. 125 грн.

- Задача 2.** Банк приймає кошти на депозитний рахунок під 32% річних, але відсотки нараховуються щомісячно. Із нарахованої суми береться податок у розмірі 25%. Сума, що залишилась після цього, додається до початкової суми на депозитному рахунку і так щомісяця. На скільки відсотків збільшиться початкова сума через 8 місяців? Відповідь округліть до цілих чисел.

- 11.** За використання базового пакета телевізійних програм абонент щомісяця сплачував 25 грн. Компанія запропонувала абонентові розширений пакет телевізійних каналів із щомісячною платою 60 грн. На скільки відсотків більше платитиме абонент щомісяця, якщо він погодиться з цією пропозицією компанії? (ЗНО, 2011 р.).
- 12.** За видачу свідоцтва про право на спадщину стягується державне мито в розмірі 0,5% від вартості майна, що успадковується. Скільки державного мита повинен сплатити спадкоємець, якщо вартість майна, що успадковується, становить 32000 грн? (ЗНО, 2010 р.).
- 13.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $4 : 5 = x : 15$; 2) $8,4 : x = 0,5 : 1,5$; 3) $\frac{27}{x} = \frac{20}{31}$; 4) $\frac{28}{21} = \frac{20}{x}$.
- 14.** За 1,5 години автомобіль проїжджає 95 км. Яку відстань подолає цей автомобіль за 2,4 години, якщо рухатиметься з постійною швидкістю?
- 15.** Із 50 кг жита отримують 45 кг борошна. Скільки кілограмів жита треба змолоти, щоб отримати 360 кг борошна?

Рівень В

- 1.** Що більше:
- 1) 0,8 чи 8 %; 2) 0,55 чи 5 %; 3) 3,7 чи 37 %; 4) 0,06 чи 6 %?
- 2.** Товар подешевшав на 20%. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту саму суму грошей? (ЗНО, 2006 р.).
- 3.** Як зміниться величина дробу, якщо чисельник збільшити на 100%, а знаменник — зменшити на 50%? (ЗНО, 2008 р.).
- 4.** Банк виплачує 15 % річних. Скільки грошей нарахує банк вкладникові за рік, якщо вклад становитиме:
- 1) 18000 грн; 2) 20000 грн?
- 5.** Перше число дорівнює 60. Друге число становить 80 % від першого, а третє — 50 % від суми першого і другого разом. Знайдіть суму цих трьох чисел.
- 6.** Визначте, на скільки $\frac{2}{3}$ числа 450 більше за 15% числа 480. (ЗНО, 2009 р.).

А	Б	В	Г	Д
118	150	228	300	372

- 7.** Якщо число b становить 47 % від додатного числа a , то $b = \dots$ (ЗНО, 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{47}{100 \cdot a}$	$\frac{100}{47 \cdot a}$	$\frac{a}{47 \cdot 100}$	$\frac{a}{47} \cdot 100$	$\frac{a}{100} \cdot 47$

- 8.** Додатне число A більше за додатне число B у 3,8 разу. На скільки відсотків число A більше від числа B ? (ЗНО, 2013 р.).

9. Початкова вартість сукні становила 144 грн. Унаслідок уцінення вартість цієї сукні було зменшено на 20 %. (ЗНО, 2014 р.).
- 1) Обчисліть вартість цієї сукні після уцінення.
 - 2) Скільки відсотків становить початкова вартість сукні від її вартості після уцінення?
10. Для приготування чайної суміші змішали індійський та цейлонський чаї у відношенні 10 : 13, причому індійського чаю взяли 180 г. (ЗНО, 2017 р., додаткова сесія).
- 1) Скільки грамів чайної суміші отримали?
 - 2) На скільки відсотків у суміші цейлонського чаю більше, ніж індійського?
11. Розв'яжіть рівняння:
- 1) $2,6 : x = 1\frac{1}{6} : 1,4$;
 - 2) $2\frac{1}{6} : x = 1\frac{4}{9} : 3\frac{1}{3}$;
 - 3) $\frac{5\frac{1}{5}}{x} = \frac{2}{\frac{3}{5}}$;
 - 4) $\frac{1\frac{5}{7}}{\frac{3}{1\frac{5}{7}}} = \frac{1\frac{11}{49}}{x}$.
12. 20 каменярів вимостять вулицю бруківкою за 30 днів. Скільки каменярів потрібно, щоб вимостити цю вулицю за 40 днів?

Рівень С

1. Вкладник розмістив у банк 40000 грн на один рік, однак йому довелося забрати гроші через п'ять місяців. Відсоткова ставка при достроковому знятті депозиту становить 8 % на рік. Знайдіть суму, яку отримає вкладник.
2. Позичальник отримав кредит на суму 50000 грн під 30 % річних. Через 270 днів кредит було повністю погашено. Яку суму грошей позичальник віддав банку?
3. Як зміниться площа прямокутника зі сторонами a і b , якщо сторону a зменшити на 25 %, а сторону b збільшити на 25 %?
4. Збільшіть число a спочатку на 20 %, а потім результат зменшіть на 20 %. Як і на скільки відсотків змінилося число a ?
5. Маємо сталь двох сортів із вмістом нікелю 5 % і 40 %. Скільки сталі того й іншого сорту необхідно взяти, щоб після переплавки одержати 140 тонн сталі з вмістом нікелю 30 %?
6. Заробітну плату робітникові спочатку підвищили на 10 %, а потім через рік підвищили на 20 %. На скільки відсотків підвищилась заробітна плата робітника в порівнянні з початковою?
7. Ціну на товар знизили на 10 %, а через місяць підвищили на 10 %. Як змінилась ціна товару?
8. Вологість повітря в полудень, у порівнянні з ранком, знизилась на 12 %, а потім підвищилась на 5 %, у порівнянні з полуднем. Скільки відсотків від ранкової вологості складає вологість вечірнього повітря, і на скільки відсотків вона знизилась?
9. На депозитний валютний рахунок під 3 % річних на початку року поклали a євро. Скільки грошей буде на рахунку через n років?
10. Кількість дівчат у класі становить 60 % від кількості хлопців. Який відсоток усіх учнів складають хлопці? (ЗНО, 2006 р.).

- 11.** У 2009 році населення деякого міста становило 350000 жителів. Щороку населення міста зростало на 2 %. Скільки жителів стало мешкати в місті у 2013 році?
- 12.** Один сплав складається з двох металів, які входять до нього у відношенні 1 : 2, а другий сплав містить ці метали у відношенні 2 : 3. Скільки треба взяти частин кожного зі сплавів, щоб отримати новий сплав, який містить ці метали у відношенні 17 : 27?

Х. Рефлексія (2–3 хв)

- | | | | |
|-----------|---|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке пропорція. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію, як застосувати пропорції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я розумію, що таке відсоток. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, навіщо введено поняття відсотка. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розрізняю типи задач на відсотки. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я можу сформулювати основну властивість пропорції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я вмію застосовувати пропорції для розв'язування задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я вмію розв'язувати задачі на використання відсотків. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |