

Тема 1.

**Повторення. Числові множини.
Тотожні перетворення
раціональних, ірраціональних,
тригонометричних
та логарифмічних виразів****Урок 3. Степінь із натуральним та цілим показниками.
Формули скороченого множення. Методи розкладу
багаточленів на множники****РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви вдосконалили навички:

- 1) формулювати означення степеня з натуральним та цілим показниками, означення одночлена, багаточлена;
- 2) застосувати властивості степенів;
- 3) спрощувати степеневі вирази;
- 4) виконувати дії над одночленами та багаточленами;
- 5) застосовувати властивості степенів для розв'язування завдань;
- 6) використовувати формули скороченого множення для спрощення виразів, обчислення значень виразів та розв'язування рівнянь;
- 7) застосовувати основні методи розкладу багаточленів на множники для розв'язування завдань.

II. Повторення

1. Порівняйте значення x та y , якщо x — корінь рівняння $\frac{5}{2x+1} = \frac{3}{2x-5}$, а y — корінь рівняння $4,3 - 0,5(y-4) = 2(9 - 0,3y)$.
2. Обчисліть суму коренів рівняння $5,8 + |2x - 4| = 7,2$.
3. Розв'яжіть нерівність $\frac{14-2x}{24+3x} \geq 0$.
4. Як зміниться величина дробу, якщо чисельник збільшити на 50%, а знаменник зменшити на 50%?
5. Банк сплачує вкладникам 6 % річних. Визначте, скільки грошей треба покласти на рахунок, щоб через рік отримати 720 гривень прибутку.

III. Степінь із натуральним та цілим показниками. Властивості степенів

Для зручності добуток багатьох рівних множників записують у вигляді степеня.

Наприклад:

- 1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$;
- 2) $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = b^7$.

У загальному вигляді: a^n — степінь, де n належить множині натуральних чисел.

a — основа степеня (визначає, які число, буква, вираз множаться самі на себе);

n — показник степеня (визначає, скільки разів число, буква, вираз множаться самі на себе).

Для зручності виконання дій зі степенями використовують властивості степенів.

Властивості степенів із натуральними показниками

Якщо a, b — дійсні числа, m, n — натуральні числа, то виконуються рівності 1) – 5).

Властивості степенів	Приклади
1) Правило множення степенів з однаковими основами: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ або $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$.	$2^2 \cdot 2^3 \cdot 2 = 2^{2+3+1} = 2^6 = 64$.
2) Правило піднесення добутку чисел до степеня: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ або $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.	$0,25^9 \cdot 4^9 = (0,25 \cdot 4)^9 = 1^9 = 1$.
3) Правило ділення степенів з однаковими основами: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$.	$\frac{9^{15}}{9^2} = 9^{15-11-2} = 9^2 = 81$.
4) Правило піднесення дробу (дробового виразу) до степеня: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ або $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.	$\frac{9^5}{3^5} = \left(\frac{9}{3}\right)^5 = 3^5 = 243$.
5) Правило піднесення степеня до степеня: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.	$(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$.

Примітка. Властивості степеня з натуральним показником справджуються і для степеня з будь-яким цілим показником (при цьому основа степеня відмінна від нуля).

Степінь з цілим показником

1) Для будь-якого числа a , яке не дорівнює 0, і натурального показника n степеня: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.	$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.
2) Якщо звичайний дріб підносити до цілого від'ємного степеня, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.	$\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$.
3) $a^0 = 1$, $a \neq 0$.	$\left(5\frac{4}{11}\right)^0 = 1$.

Приклад 1. Обчисліть значення виразу $\frac{3^{16} \cdot 9^3}{27^7}$.

Розв'язання. $\frac{3^{16} \cdot 9^3}{27^7} = \frac{3^{16} \cdot (3^2)^3}{(3^3)^7} = \frac{3^{16} \cdot 3^6}{3^{21}} = 3^{16+6-21} = 3^1 = 3$.

Відповідь. 3.

IV. Одночлени, багаточлени та дії над ними

Означення. Вирази, що не містять дію ділення на вираз зі змінною, називають **цілими виразами**.

Цілі вирази поділяють на:

- одночлени;
- багаточлени.

Означення. Одночленом називається алгебричний вираз, у якому числа і букви з'єднані лише двома діями — множенням і піднесенням до натурального степеня.

Наприклад: 40 ; $5a^2$; dc ; $-0,8p^2q^5r$; $42m^3n^4c^{10}$.

Отже, над одночленами можна виконувати лише дві дії: множення і піднесення до натурального степеня.

Якщо в одночлені добуток усіх його чисел записати перед буквами, а добуток кожної його букви та її степенів подати в натуральному степені цієї букви, то після такого перетворення одночлен вважають записаним у *стандартному вигляді*, а його числовий множник називають *коефіцієнтом одночлена*.

Степінь одночлена визначають як суму показників степенів усіх букв, з яких складається одночлен.

Наприклад, степінь одночлена $15a^4b^3c^2d$ дорівнює 10, оскільки сума показників степенів букв $(4 + 3 + 2 + 1)$ становить 10.

Означення. Багаточленом називається сума декількох одночленів, які називають членами багаточлена.

Наприклад: $5b^3 - 2b$; $b^4 - 16$; $3 - x$; $12x^4 + 4xy + 3$.

Степінь багаточлена — найбільший степінь одночлена, який входить до його складу.

Наприклад:

1) $2x - 3xy - 4x^3y^5$ — багаточлен восьмого степеня.

2) $4x^3 + 3x^2 + x - 5$ — багаточлен третього степеня.

Подібні одночлени — це одночлени записані в стандартному вигляді, які збігаються або відрізняються лише числовими коефіцієнтами.

Подібні члени багаточлена можна зводити, виконавши додавання або віднімання їхніх числових коефіцієнтів. Тоді отримаємо **багаточлен стандартного вигляду**.

Дії з багаточленами	Приклади
1) Додавання або віднімання багаточленів. Щоб додати або відняти два багаточлени, потрібно взяти їх в дужки і поставити між ними відповідний знак «плюс» або «мінус» та використати правила розкриття дужок.	$(2a + 3b - 8) - (4b + 6 - a) =$ $= 2a + 3b - 8 - 4b - 6 + a =$ $= 3a - b - 14.$
2) Множення многочлена на одночлен. Щоб помножити багаточлен на одночлен потрібно кожний член багаточлена помножити на цей одночлен.	$-5a(4 - b - a^2) = -20a + 5ab +$ $+ 5a^3 = 5a^3 + 5ab - 20a.$
3) Множення багаточленів. Щоб помножити багаточлен на багаточлен потрібно помножити кожний член першого багаточлена на кожний член другого багаточлена.	$(3 + b)(b^2 - 5) =$ $= 3b^2 - 15 + b^3 - 5b =$ $= b^3 + 3b^2 - 5b - 15.$
4) Піднесення багаточлена до степеня. Піднести багаточлен до натурального степеня — означає помножити його самого на себе стільки разів, який показник степеня.	$(1 + 4x)^2 = (1 + 4x)(1 + 4x) =$ $= 1 + 4x + 4x + 16x^2 =$ $= 1 + 8x + 16x^2 = 16x^2 + 8x + 1.$

Приклад 2. Перетворіть вираз $x^3(2x^2 - x + 4)(x - 2)$ на багаточлен стандартного вигляду.

Розв'язання. $x^3(2x^2 - x + 4)(x - 2) = (2x^2 - x + 4)(x^4 - 2x^3) =$
 $= 2x^6 - 4x^5 - x^5 + 2x^4 + 4x^4 - 8x^3 = 2x^6 - 5x^5 + 6x^4 - 8x^3.$

Відповідь. $2x^6 - 5x^5 + 6x^4 - 8x^3.$

V. Формули скороченого множення

При піднесенні багаточленів до степеня, розкладі багаточленів в на множники, перетворенні виразів тощо використовуються формули скороченого множення.

Формули скороченого множення

1. Квадрат суми: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
2. Квадрат різниці: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$
3. Різниця квадратів: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$
4. Різниця кубів: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$
5. Сума кубів: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$

6*. Куб суми: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

7*. Куб різниці: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

Усі наведені формули можна довести шляхом розкриття дужок і зведенням подібних доданків.

Приклад 3. Обчисліть добуток чисел 4,97 і 5,03 без використання калькулятора та множення в стовпчик.

Розв'язання. Запишемо $4,97 = 5 - 0,03$ і $5,03 = 5 + 0,03$, тоді:

$$4,97 \cdot 5,03 = (5 - 0,03)(5 + 0,03) = 5^2 - (0,03)^2 = 25 - 0,0009 = 24,9991.$$

Відповідь. 24,9991.

VI. Методи розкладу багаточленів на множники

Для спрощення алгебричних виразів, розв'язування рівнянь, тотожних перетворень виразів, обчислень тощо багаточлени розкладають на множники.

Розкласти багаточлен на множники — означає подати його у вигляді добутку двох або більше багаточленів.

Методи розкладу багаточленів на множники

- винесення спільного множника за дужки;
- використання формул скороченого множення;
- групування і винесення за дужки спільного множника;
- виділення повного квадрата;
- використання формули розкладу квадратного тричлена на множники.

1. Винесення спільного множника за дужки

Приклади.

1) $7x^2 - 14x = 7x \cdot x - 2 \cdot 7x = 7x(x - 2)$.

2) $11 - 33y = 11 \cdot 1 - 11 \cdot 3y = 11(1 - 3y)$.

2. Використання формул скороченого множення:

1) квадрата суми: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$;

2) квадрата різниці: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$;

3) різниці квадратів: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

4) різниці кубів: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

5) суми кубів: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Приклади.

1) $25y^2 - 4x^2 = (5y)^2 - (2x)^2 = (5y - 2x)(5y + 2x)$.

2) $x^2 - 10xy + 25y^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 = (x - 5y)^2 = (x - 5y)(x - 5y)$.

3. Групування (за знаками або за степенями) і винесення за дужки спільного множника

Приклади.

1) $3x(x + y) + cx + cy = 3x(x + y) + (cx + cy) = 3x(x + y) + c(x + y) = (x + y)(3x + c)$.

2) $a^3 - a^2 - a + 1 = (a^3 - a^2) - (a - 1) = a^2(a - 1) - 1(a - 1) = (a - 1)(a^2 - 1) = (a - 1)(a - 1)(a + 1)$.

4. Виділення повного квадрата

Приклад.

$$a^2 + 8a + 12 = a^2 + 2 \cdot 4 \cdot a + 16 - 4 = (a + 4)^2 - 4 = (a + 4 - 2)(a + 4 + 2) = (a + 2)(a + 6).$$

5. Використання формули розкладу квадратного тричлена на множники

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена.

Приклад. Коренями квадратного тричлена $3x^2 - 4x - 4$ є числа $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

$$\text{Тоді } 3x^2 - 4x - 4 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 2) = (3x + 2)(x - 2).$$

Приклад 4. Розкладіть багаточлен на множники $5x^4 - 20x^2y^2$.

Розв'язання. Спочатку винесемо за дужки спільний множник $5x^2$ і скористаємося формулою різниці квадратів: $5x^4 - 20x^2y^2 = 5x^2(x^2 - 4y^2) = 5x^2(x - 2y)(x + 2y)$.

Відповідь. $5x^2(x - 2y)(x + 2y)$.

VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Навколо майданчика квадратної форми планують установити огорожу так, щоб обгородити ділянку у формі прямокутника, шириною на 2 м довшою за сторону квадрата, і довжиною — на 3 м коротшою від подвоєної сторони квадрата. Складіть вираз для обчислення площі території, обгородженої навколо майданчика, і обчисліть цю площу, якщо довжина сторони майданчика 8 м. З'ясуйте за допомогою інтернет-ресурсів орієнтовну вартість 1 м^2 бруківки і визначте, в яку суму обійдеться покриття цієї площі бруківкою.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. $2(5x + 6) = \dots$ (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$10x + 12$	$10x + 6$	$7x + 8$	$7x + 12$	$5x + 8$

2. $0,4x^2 \cdot 5x^3 = \dots$ (ЗНО, 2016 р.).

А	Б	В	Г	Д
$2x^6$	$20x^5$	$2x^5$	$0,2x^5$	$0,2x^6$

3. $\frac{3x^2y}{9xy^3} = \dots$ (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$27x^3y^4$	$\frac{x^3y^4}{3}$	$\frac{3x}{y^2}$	$\frac{x^3}{3y^4}$	$\frac{x}{3y^2}$

4. Розкладіть на множники вираз $25x^2 - 1$. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(25x - 1)(x + 1)$	$(5x - 1)^2$	$(5x - 1)(5x + 1)$	$5(x - 1)(x + 1)$	$25(x - 1)(x + 1)$

5. Виконайте дії зі степенями:

- 1) $(5a^3)^2$; 2) $(m^3)^8 : m^6$; 3) $(a^7)^4 : a^{14}$; 4) $(-9x^5y^6)^2$;
 5) $(a^2)^6 \cdot a^3$; 6) $(0,5x^3y^6)^2$; 7) $a^5 \cdot a^{12} : a^{15}$; 8) $(7^4)^3 : 7^{10}$.

6. Обчисліть:

- 1) $97^0 + (0,5)^{-3}$; 2) $(2a^2)^3 : 16a^5$, якщо $a = -2$;
 3) $\frac{a^8 \cdot a^{-11}}{a^{-3}}$, якщо $a = 0,317$.

7. Спростіть вираз:

- 1) $a^{-8}b \cdot ab^{-8}$; 2) $x^{-5}y : y^{-5}x$; 3) $\frac{6c^{-5}}{d^{-5}} \cdot \frac{d^6}{18c^6}$; 4) $\frac{7m^{-2}p^3}{5m^2} \cdot \frac{10m^6}{p^{-4}}$.

8. Спростіть вираз:

- 1) $(4a^{-4})^{-2}$; 2) $(-2a^{-3})^{-3}$; 3) $\left(\frac{1}{5}a^{-4}b^{-1}\right)^{-3}$; 4) $\left(-\frac{2}{3}a^7b^{-5}\right)^{-3}$.

9. Розкладіть багаточлени на множники:

- 1) $7x - 28c$; 2) $a^2 - 25$; 3) $3c - 6c^2$;
 4) $100 - d^2$; 5) $5p^2 - 5p$; 6) $49a^2 - 36b^2$.

10. Подайте у вигляді багаточлена:

- 1) $(x - 10)(x + 10)$; 2) $(2a - 3b)(2a + 3b)$;
 3) $(a - 6)^2$; 4) $(3c + 2d)^2$.

11. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3(x - 5) + 23 = 53$; 2) $7 - (2x - 4) + x = 17$;
 3) $-3x - 5 + 4x + x = 13$; 4) $-4(3x - 1) + 2(3x - 6) = -8$.

12. Знайдіть сторону квадрата, якщо при зменшенні її довжини на 7 см отримаємо квадрат, площа якого на 120 см^2 менша від площі даного квадрата.

Рівень В

1. Обчисліть:

- 1) $(0,7 - 0,9)^2$; 2) $0,6^2 : 0,3 - 29^0$;
 3) $-4^4 + 4^2 \cdot (-2^2 + 1)$; 4) $5 \cdot (-4)^2 - (2^3 - 1)^2$.

2. Спростіть вираз:

- 1) $(0,2a^{-4})^{-2}$; 2) $(-4a^{-3}n)^{-3}$; 3) $\left(\frac{4a^{-4}}{5b^{-1}}\right)^{-3}$; 4) $\left(-\frac{2b^{-5}}{3a^7}\right)^{-3}$.

3. Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:

- 1) $-(5a - 6 + 3b) - 5a$; 2) $7x - 4y - 7 - (4y + 7x)$;
 3) $9x - 8(5x - 2y + 6)$; 4) $8(4 - a) - 4(-3a + 1) - 19$;
 5) $(2a^2 - 4a + a^3) + (-a^3 + 2a^2 + a)$; 6) $(a^2 - 3b) + (-a^2 - 3b) - (-3b - a^2)$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 1)(3 - x) = 0$;

3) $-6(2 - 3x) - 7(2x + 2) - 5x = -8$;

5) $(2 - a)^2 - (a - 3)^2 = 0$;

7) $(x - 3)(x + 3) - (x^2 - 2x - 4) = 5 - 2x$;

2) $3x(x - 2) - 3x^2 + 12 = 0$;

4) $(x - 3)^2 - 2(x - 4) = x^2 - 3$;

6) $(10x + 9)x - (5x - 1)(2x + 3) = 8$;

8) $(x + 2)^2 - 2(x + 4) = x^2 - 3x$.

5. Розкладіть на множники вираз:

1) $a^2 - 2a + 1$;

3) $4 - 4a + a^2$;

5) $16a^2 - 81c^2$;

7) $-a^2 + 36$;

2) $(a + c)^2 - x^2$;

4) $a^4b^2c^2 - 81m^4$;

6) $(a + b - c)^2 - 4$;

8) $(1 - x^2)^2 - 4x^2$;

6. Розкладіть на множники вираз $(a - 1)^2 - (b - 1)^2$. (ЗНО, 2016 р.).

7. Обчисліть:

1) $2001^2 - 1999^2$;

3) $9,01^2 - 8,99^2$;

2) $4002^2 - 3998^2$;

4) $10,02^2 - 9,98^2$.

8. Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та його значенням (А–Д). (ЗНО, 2016 р.).

Числовий вираз

1) $16^{\frac{1}{2}}$

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

3) $(2^3)^2$

4) $2^{3,5} \cdot 2^{1,5}$

Значення числового виразу

А 4

Б 8

В 16

Г 32

Д 64

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

9. Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо квадрат середнього з них на 4 менший від різниці квадратів двох інших чисел.

10. Обчисліть значення виразу $\frac{2^{-1,8} \cdot 4^{4,9}}{16^{\frac{3}{4}}}$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $((7^{-2})^{-7} \cdot (7^{-8})^2)^{-1}$;

3) $\frac{49^n}{7^{2n-3}}$;

2) $5^{-8} \cdot 125^3 : 25$;

4) $\frac{20^n}{2^{2n-1} \cdot 5^{n+1}}$.

2. Скоротіть дріб:

1) $\frac{7^{k+2} - 7^k}{24}$;

2) $\frac{a^9 - a^5}{a^{-3} - a}$.

3. Обчисліть: $\frac{0,8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-6}}{(0,64)^{-5} \cdot \left(1\frac{9}{16}\right)^{-6}}$.

4. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n :

1) число 3^{4n} закінчується одиницею;

2) значення виразу $10^n - 1$ кратне 3.

5. Доведіть, що значення виразу $216^3 - 16^3$ кратне 100.
6. Для якого натурального значення d рівність $(2,5m^7c)^d \cdot 0,8m^d c^2 \cdot 2c^d = 2,5m^{24}c^8$ — тотожність?
7. Обчисліть значення виразу $\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a^2 + 4ab} : \frac{15a - 15b}{a + 4b}$ при $a = 0,1$, $b = 3,7$. (ЗНО, 2015 р.).
8. Обчисліть значення виразу $\frac{10a + b}{b^2 - 4a^2} + \frac{4a + 2b}{b^2 + 4ab + 4a^2}$ при $a = 0,25$, $b = 4,5$. (ЗНО, 2015 р.).
9. Знайдіть частку від ділення $7 \cdot 36^3 + 5 \cdot 216^2$ на 12 як степінь числа 6. У відповідь запишіть показник степеня.
10. Обчисліть значення виразу $\frac{16^{-4m} \cdot 16^{8m}}{2^{2m} \cdot 8^{2m}}$, якщо $m = \frac{1}{4}$.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
 - 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
 - 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
 - 4) Найскладнішим для мене було
 - 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
 - 6) Найбільше мені сподобалося
- Поради собі для наступного уроку







