

Повторення. Числові множини. Тотожні перетворення раціональних, ірраціональних, тригонометричних та логарифмічних виразів

Урок 5. Тотожні перетворення ірраціональних виразів

План уроку

1. Квадратні корені та їхнє застосування.
2. Корені n -го степеня та їхнє застосування.
3. Тотожні перетворення ірраціональних виразів.
4. Степені з раціональними показниками.
5. Спрощення та перетворення виразів, що містять степені з раціональними показниками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки комплексних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2–1];

розпізнає неповну й надлишкову інформацію, маніпулювання даними, визначає надійність джерел [12 МАО 1.2.1–2];

розрізняє форми подачі інформації математичного змісту (текст, графік, аудіо, відео тощо) [12 МАО 2.1.1–1];

упорядковує інформацію математичного змісту [12 МАО 2.1.3–1];

висловлює ідеї, пов'язані з розумінням комплексної проблемної ситуації [12 МАО 2.4.2–2];

визначає, аналізує й узагальнює зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу [12 МАО 4.1.1–1];

досліджує та доводить математичні твердження [12 МАО 4.1.2–2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі (практичних задач). Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі (задач) групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Як знайти довжину сторони квадрата, якщо відома його площа?
- 2) Який зв'язок між піднесенням числа (виразу) до степеня та добуванням кореня з числа (виразу)?
- 3) Як знання про корені n -го степеня допомагають в реальних життєвих задачах?
- 4) Чи можна знайти корінь з від'ємного числа? Якщо так, то коли це можливе?
- 5) Чи може будівельник, інженер або дизайнер обійтися без уміння працювати з коренями n -го степеня?
- 6) Чи існує число, корінь з якого дорівнює самому числу?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть значення виразу $\frac{1}{7} \cdot (\sqrt{28})^2 - \left(\frac{1}{4}\sqrt{48}\right)^2$.

Відповідь. 1.

2. Розкладіть на множники квадратний тричлен $5c^2 - 16c + 3$.
Відповідь. $(5c - 1)(c - 3)$.
3. Обчисліть значення виразу $\frac{0,125^2 \cdot 8^3}{4 \cdot 0,5^{-3}}$.
Відповідь. 0,25.
4. Задайте формулою лінійну функцію $y = f(x)$, якщо $f(-15) = -1$, $f(-6) = -4$.
Відповідь. $y = -\frac{1}{3}x - 6$.
5. Знайдіть область значень функції $y = 7 - 5\sqrt{x}$.
Відповідь. $(-\infty; 7]$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Адміністрація ліцею закупила 200 керамічних плиток площею $0,25 \text{ м}^2$ кожна. Плитками замостять (без відступів і швів) майданчик у формі квадрата.

- 1) Знайдіть довжину сторони майданчика (в метрах).
- 2) Скільки додаткових плиток потрібно купити, щоб збільшити довжину сторони майданчика на 1 метр?

Задача 2. На шкільному подвір'ї встановлено прожектор, який рівномірно освітлює ділянку у формі круга, площа якої становить $78,5 \text{ м}^2$. Заплановано замінити прожектор на потужніший, який буде освітлювати вдвічі більшу площу.

- 1) Знайдіть радіус освітленої ділянки після заміни прожектора.
- 2) На скільки відсотків збільшиться радіус круга?

III. Квадратні корені та їхнє застосування (4–5 хв)

Якщо площа квадрата 100 см^2 , то довжину сторони квадрата можна знайти, розв'язавши рівняння $x^2 = 100$, звідси $x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$.

Оскільки довжина сторони квадрата $x > 0$, то $x = 10 \text{ см}$ — довжина сторони квадрата.

Означення. Корені рівняння виду $x^2 = a$, якщо $a > 0$, називають **квадратними коренями** і позначають $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$. Додатне значення кореня рівняння $x^2 = a$ називається **арифметичним квадратним коренем** із числа a .

Означення. **Арифметичним квадратним коренем** із числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a .

Тобто: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Наприклад, $\sqrt{36} = 6$, оскільки $6^2 = 36$;

$\sqrt{0} = 0$, оскільки $0^2 = 0$;

$\sqrt{64} = 8$, оскільки $8^2 = 64$;

$\sqrt{81} = 9$, оскільки $9^2 = 81$;

$\sqrt{\frac{16}{225}} = \frac{4}{15}$, оскільки $\left(\frac{4}{15}\right)^2 = \frac{16}{225}$.

Числа, з яких корінь без остачі не добувається, називають ірраціональними числами, тобто нескінченними неперіодичними десятковими дробами. Тоді, для обчислень, можна брати наближені значення цих коренів.

Порада учням. Запам'ятайте, що $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{3} \approx 1,7$, оскільки ці корені часто використовують як у практичних обчисленнях, так і, до речі, в тестових завданнях ЗНО/НМТ.

Властивості арифметичних квадратних коренів

1. Для будь-якого $a \geq 0$ виконується тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$.

2. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ або $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Приклад. $\sqrt{144 \cdot 625} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{625} = 12 \cdot 25 = 300$.

3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ або $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ при $a \geq 0$, $b > 0$.

Приклад. $\sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$.

4. $\sqrt{a^2} = |a|$, для будь-якого числа a .

Приклади.

1) $\sqrt{7^2} = |7| = 7$.

2) $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$.

5. $\sqrt{a^{2k}} = |a|^k$, для будь-якого числа a .

Приклад. $\sqrt{(-3)^{10}} = |-3|^5 = 243$.

Ілюстративні приклади (3–4 хв)

6. Обчисліть значення виразу $\sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}}$.

Розв'язання. $\sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}} = \sqrt{\frac{13}{9}} \cdot \sqrt{\frac{16}{13}} = \sqrt{\frac{13}{9} \cdot \frac{16}{13}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Відповідь. $1\frac{1}{3}$.

7. Спростіть вираз $(\sqrt{7-\sqrt{8}})^2 - \sqrt{(\sqrt{8}-10)^2}$.

Розв'язання. $(\sqrt{7-\sqrt{8}})^2 - \sqrt{(\sqrt{8}-10)^2} = 7 - \sqrt{8} - |\sqrt{8}-10| = 7 - \sqrt{8} + \sqrt{8} - 10 = -3$.

Відповідь. -3 .

IV. Тотожні перетворення ірраціональних виразів із квадратними коренями

Означення. Вирази, що містяться під знаком кореня, або показник степеня яких є дробово-раціональним виразом, називають *ірраціональними виразами*.

Перетворення ірраціональних виразів, які містять квадратні корені

Крім множення, ділення та піднесення кореня до степеня, при виконанні дій з ірраціональними виразами використовують такі перетворення арифметичних квадратних коренів:

- 1) винесення множника з-під знака кореня;
- 2) внесення множника під знак кореня;
- 3) звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу;
- 4) зведення подібних коренів;
- 5) перетворення складного радикала.

- 1.** Винесення множника з-під знака кореня: $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b} = \begin{cases} a\sqrt{b}, & a > 0; \\ -a\sqrt{b}, & a < 0. \end{cases}$

Наприклад:

- 1) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$;
- 2) $\sqrt{9c^5} = \sqrt{9 \cdot c^4 \cdot c} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{c^4} \cdot \sqrt{c} = 3c^2\sqrt{c}$;
- 3) $\sqrt{7b^2} = \sqrt{b^2 \cdot 7} = |b|\sqrt{7} = -b\sqrt{7}$, якщо $b < 0$.

- 2.** Внесення множника під знак кореня: $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b}, & a > 0; \\ -\sqrt{a^2b}, & a < 0. \end{cases}$

Наприклад:

- 1) $5\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{75}$;
- 2) $-2\sqrt{3} = -\sqrt{3 \cdot 2^2} = -\sqrt{12}$.

- 3.** Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу.

При звільненні від ірраціональності використовують:

- 1) поняття спряжених виразів;
- 2) основну властивість дробового виразу.

Означення. Два ірраціональних вирази P і Q називають *спряженими* один до одного, якщо їхній добуток PQ – раціональний вираз, тобто вираз без коренів.

Якщо $P = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, то $Q = \sqrt{x} \mp \sqrt{y}$.

При звільненні від ірраціональності в знаменнику дробу можливі два випадки.

Випадок I. $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Випадок II. Помножимо чисельник і знаменник дробового виразу на вираз, спряжений до знаменника (інший знак в дужках):

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1.$$

4. Зведення подібних коренів.

Означення. Арифметичні квадратні корені, які відрізняються лише числовими коефіцієнтами або не відрізняються взагалі, називають *подібними коренями*.

Наприклад, $5\sqrt{3}$ і $-2\sqrt{3}$.

Тоді винесення за дужки спільного множника називають зведенням подібних коренів: $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(5 - 2) = 3\sqrt{3}$.

Наприклад:

1) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;

2) $2\sqrt{a} + 4\sqrt{a} = 6\sqrt{a}$.

Ілюстративні приклади

8. Спростіть вираз $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$.

Розв'язання. $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = (2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$
 $= 20 - 4\sqrt{15} + 3 - 3 + \sqrt{15} = 20 - 3\sqrt{15}$.

Відповідь. $20 - 3\sqrt{15}$.

9. Скоротіть дробовий вираз $\frac{a + 4\sqrt{a}\sqrt{b} + 4b}{a - 4b}$.

Розв'язання. $\frac{a + 4\sqrt{a}\sqrt{b} + 4b}{a - 4b} = \frac{(\sqrt{a})^2 + 4\sqrt{a}\sqrt{b} + (2\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2 - (2\sqrt{b})^2} = \frac{(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})} =$
 $= \frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}}$.

V. Корені n -го степеня та їхнє застосування (4–5 хв)

Означення. *Коренем n -го степеня*, де n — натуральне число, яке більше за 1, з числа a називають число, n -й степінь якого дорівнює a .

Наприклад, $\sqrt[7]{128} = 2$, бо $2^7 = 128$.

Корінь $\sqrt[n]{a}$ завжди існує і має єдине значення, якщо n — непарне.

Якщо n — парне натуральне число, то вираз $\sqrt[n]{a}$ існує при $a \geq 0$.

Означення. *Арифметичним коренем n -го степеня* з невід'ємного числа a називають невід'ємне число, n -й степінь якого дорівнює a .

Властивості кореня n -го степеня, які впливають із його означення

1. Якщо $b = \sqrt[n]{a}$, то $b^n = a$.
2. $\sqrt[n]{a} \geq 0$, якщо $a \geq 0$.
3. $(\sqrt[n]{a})^n = a$, якщо $a \geq 0$.
4. $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.
5. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, якщо n — парний показник,
 $\sqrt[n]{a^n} = a$, якщо n — непарний показник.

Наприклад:

а) $\sqrt{a^2} = |a|$ при всіх дійсних a ;

б) $\sqrt[3]{a^3} = a$ при всіх дійсних a .

Властивості арифметичних коренів n -го степеня

Нехай $a \geq 0$, $b \geq 0$, n, k, m — натуральні числа, які більші за 1.

Тоді виконуються властивості 1) – 4).

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ або $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ або $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ при $b \neq 0$.
3. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Властивість 5) виконується для будь-яких значень a .

5. $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{|a|^k}$, якщо m — парне;
 $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$, якщо m — непарне.

Ілюстративні приклади (4–5 хв)

10. Обчисліть значення виразу $\sqrt[4]{3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}} + (2\sqrt[3]{-2})^3$.

Розв'язання. $\sqrt[4]{3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}} + (2\sqrt[3]{-2})^3 = \sqrt[4]{\frac{27}{8} \cdot \frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{5}{80}} + 2^3 \cdot (\sqrt[3]{-2})^3 =$
 $= \sqrt[4]{\frac{81}{16}} + \sqrt[4]{\frac{1}{16}} + 8 \cdot (-2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 16 = -14.$

Відповідь. -14 .

11. Порівняйте: $3\sqrt[3]{2}$ і $2\sqrt[3]{5}$.

Розв'язання. $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{54}$, $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{40}$.

Оскільки $\sqrt[3]{54} > \sqrt[3]{40}$, то $3\sqrt[3]{2} > 2\sqrt[3]{5}$.

Відповідь. $3\sqrt[3]{2} > 2\sqrt[3]{5}$.

VI. Тотожні перетворення ірраціональних виразів, які містять корені n -го степеня

Приклади перетворення ірраціональних виразів, які містять корені n -го кореня:

- 1) $\sqrt[6]{160} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 5} = 2\sqrt[6]{5}$;
- 2) $\sqrt[4]{(-3)^4 \cdot 10} = |-3|\sqrt[4]{10} = 3\sqrt[4]{10}$;
- 3) $\sqrt[3]{-250} = \sqrt[3]{-125 \cdot 2} = \sqrt[3]{(-5)^3 \cdot 2} = -5\sqrt[3]{2}$;
- 4) $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2 \cdot 5^4} = \sqrt[4]{1250}$;
- 5) $-3\sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{5 \cdot 3^4} = -\sqrt[4]{405}$;
- 6) $\frac{20}{\sqrt[5]{8}} = \frac{20}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{20 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}} = \frac{20 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{20 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{2} = 10 \cdot \sqrt[5]{4}$;
- 7) $\sqrt[4]{9 - \sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9 + \sqrt{65}} = \sqrt[4]{(9 - \sqrt{65}) \cdot (9 + \sqrt{65})} = \sqrt[4]{9^2 - (\sqrt{65})^2} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Ілюстративний приклад

- 12.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{12}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}}$.

Розв'язання.
$$\frac{12}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}} = \frac{12 \cdot (\sqrt[3]{7^2} + \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}{(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}) \cdot (\sqrt[3]{7^2} + \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})} = \frac{12 \cdot (\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{25})}{(\sqrt[3]{7})^3 - (\sqrt[3]{5})^3} =$$
$$= \frac{12 \cdot (\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{25})}{2} = 6 \cdot (\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{25}).$$

Відповідь. $6(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{25})$.

VII. Степені з раціональними показниками. Спрощення та перетворення виразів, що містять степені з раціональними показниками

Для будь-якого $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ виконується рівність $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Наприклад: $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[7]{11^5} = 11^{\frac{5}{7}}$.

Примітка. Властивості степенів із цілими показниками виконуються і для степенів із раціональними показниками.

Спрощення та перетворення виразів, які містять степені з раціональними показниками, виконуються аналогічно спрощенню і перетворенню виразів, що містять степені з цілими показниками.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 13.** Подайте вираз $\frac{\left(m^{\frac{5}{14}}\right)^7}{\sqrt[5]{m^3}}$ у вигляді степеня.

Розв'язання. $\frac{\left(m^{\frac{5}{14}}\right)^7}{\sqrt[5]{m^3}} = \frac{m^{\frac{5}{14} \cdot 7}}{m^{\frac{3}{5}}} = \frac{m^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{3}{5}}} = m^{\frac{5}{2} - \frac{3}{5}} = m^{\frac{19}{10}} = m^{1,9}.$

Відповідь. $m^{1,9}.$

- 14.** Знайдіть число k , якщо $\sqrt[4]{\frac{1}{7} \sqrt[3]{7} \sqrt{\frac{1}{7}}} = 7^k.$

Розв'язання. $\sqrt[4]{\frac{1}{7} \sqrt[3]{7} \sqrt{\frac{1}{7}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{7} \sqrt[3]{7 \cdot 7^{-\frac{1}{2}}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{7} \sqrt[3]{7^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[4]{7^{-1} \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{7^{-1} \cdot 7^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[4]{7^{-\frac{5}{6}}} =$
 $= \left(7^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = 7^{-\frac{5}{24}}.$

Оскільки $7^k = 7^{-\frac{5}{24}}$, то $k = -\frac{5}{24}.$

Відповідь. $-\frac{5}{24}.$

- 15.** Винесіть у виразі $p^{\frac{5}{6}} - p^{\frac{1}{3}}$ спільний множник за дужки.

Розв'язання. $p^{\frac{5}{6}} - p^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{5}{6}} - p^{\frac{2}{6}} = p^{\frac{2}{6}} \left(p^{\frac{3}{6}} - 1\right) = p^{\frac{1}{3}} \left(p^{\frac{1}{2}} - 1\right).$

Відповідь. $p^{\frac{1}{3}} \left(p^{\frac{1}{2}} - 1\right).$

- 16.** Скоротіть дріб $\frac{40^{\frac{3}{5}} - 8^{\frac{3}{5}}}{10^{\frac{3}{5}} - 2^{\frac{3}{5}}}.$

Розв'язання. $\frac{40^{\frac{3}{5}} - 8^{\frac{3}{5}}}{10^{\frac{3}{5}} - 2^{\frac{3}{5}}} = \frac{(5 \cdot 8)^{\frac{3}{5}} - 8^{\frac{3}{5}}}{(5 \cdot 2)^{\frac{3}{5}} - 2^{\frac{3}{5}}} = \frac{5^{\frac{3}{5}} \cdot 8^{\frac{3}{5}} - 8^{\frac{3}{5}}}{5^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} - 2^{\frac{3}{5}}} = \frac{8^{\frac{3}{5}} \cdot (5^{\frac{3}{5}} - 1)}{2^{\frac{3}{5}} \cdot (5^{\frac{3}{5}} - 1)} = \frac{8^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{3}{5}}} = \left(\frac{8}{2}\right)^{\frac{3}{5}} = 4^{\frac{3}{5}} = 2^{1,2}.$

Відповідь. $2^{1,2}.$

VIII. Розв'язування практичних задач. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Адміністрація ліцею закупила 200 керамічних плиток площею $0,25 \text{ м}^2$ кожна. Плитками замостять (без відступів і швів) майданчик у формі квадрата.

- 1) Знайдіть довжину сторони майданчика (в метрах).
- 2) Скільки додаткових плиток потрібно купити, щоб збільшити довжину сторони майданчика на 1 метр?

Розв'язання. 1) Площа майданчика у формі квадрата: $S = 0,25 \cdot 200 = 50 \text{ (м}^2\text{)}$.

Оскільки площа квадрата $S = a^2$, то $a = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ (м)}$ — довжина сторони квадрата.

Якщо довжину сторони квадрата потрібно збільшити на 1 м, то $a_1 = (5\sqrt{2} + 1) \text{ м}$ — довжина сторони більшого квадрата.

Оскільки $S_1 = a_1^2$, то $S_1 = (5\sqrt{2} + 1)^2 = (5\sqrt{2})^2 + 10\sqrt{2} + 1 = 51 + 10\sqrt{2} \text{ (м}^2\text{)}$ — площа більшого квадрата.

2) Різниця площ квадратів: $S_1 - S = 51 + 10\sqrt{2} - 50 = 1 + 10\sqrt{2} \text{ (м}^2\text{)}$.

Кількість додаткових плиток: $\frac{1 + 10\sqrt{2}}{0,25} = 4 \cdot (1 + 10\sqrt{2}) = 4 + 40\sqrt{2} \approx 60,57 \approx 61 \text{ (шт.)}$.

Відповідь. 1) 7,07 м; 2) 61 плитку.

Задача 2. На шкільному підвір'ї встановлено прожектор, який рівномірно освітлює ділянку у формі круга, площа якої становить $78,5 \text{ м}^2$. Заплановано замінити прожектор на потужніший, який буде освітлювати вдвічі більшу площу.

- 1) Знайдіть радіус освітленої ділянки після заміни прожектора.
- 2) На скільки відсотків збільшиться радіус круга?

Розв'язання. 1) Оскільки площу круга обчислюють за формулою $S = \pi r^2$, то:

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad r = \sqrt{\frac{78,5}{3,14}} = \sqrt{25} = 5 \text{ (м)} \text{ — радіус початкового круга.}$$

2) Радіус круга вдвічі більшої площі: $R = \sqrt{\frac{78,5 \cdot 2}{3,14}} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ (м)}$.

Різниця довжин радіусів: $R - r = 7,07 - 5 = 2,07 \text{ (м)}$.

Збільшення радіуса у відсотках: $2,07 : 5 \cdot 100 \% \approx 41,4 \%$.

Відповідь. 1) $5\sqrt{2}$ м; 2) на 41,4 %.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Між якими послідовними цілими числами міститься число:

- 1) $\sqrt{7}$;
- 2) $\sqrt[3]{31}$;
- 3) $\sqrt[3]{-0,8}$;
- 4) $-\sqrt[5]{30}$?

2. Обчисліть:

- 1) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$;
- 2) $\sqrt[5]{0,00243}$;
- 3) $30\sqrt[6]{\frac{1}{216}}$;
- 4) $35\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$.

3. Обчисліть:

1) $(\sqrt[6]{13})^6$; 2) $(-\sqrt[5]{3})^5$; 3) $(-\sqrt[4]{31})^4$; 4) $-\sqrt[4]{31^4}$.

4. Обчисліть:

1) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$; 2) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$; 3) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^3}$; 4) $\sqrt[5]{7^6} \cdot \sqrt[5]{7^4}$.

5. При яких значеннях змінної a , має зміст вираз:

1) $\sqrt[8]{a-5}$; 2) $\sqrt[7]{a+8}$; 3) $\frac{4}{\sqrt[6]{7+a}}$; 4) $\frac{3a}{\sqrt[5]{7-2a}}$?

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^7 = 5$; 2) $x^6 = 11$; 3) $\frac{1}{2}x^4 - 8 = 0$; 4) $\frac{1}{8}x^5 + 4 = 0$.

7. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{25c}$; 2) $\sqrt{32c^5}$; 3) $\sqrt[3]{40c^8}$; 4) $\sqrt[4]{243c^{11}}$.

8. Внесіть множник під знак кореня:

1) $4\sqrt{5p}$; 2) $-2\sqrt{3p}$; 3) $p\sqrt[3]{3p}$, $p < 0$; 4) $p\sqrt[6]{8p^4}$, $p < 0$.

9. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[10]{7^5}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}$.

10. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{2}{\sqrt{10}}$; 2) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$; 3) $\frac{7}{\sqrt[4]{125}}$; 4) $\frac{15}{3\sqrt[5]{16}}$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 2) $\sqrt[5]{-0,00032} + \sqrt[3]{0,008}$;
3) $\sqrt[3]{0,216} - \sqrt[5]{-0,01024}$; 4) $4,5\sqrt[6]{\frac{1}{64}} - 10\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$.

2. Обчисліть:

1) $\sqrt[4]{\frac{7^{12}}{0,0625}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{1250}}$; 3) $\sqrt[7]{\frac{2^7 \cdot 3^{21}}{5^{14}}}$; 4) $\sqrt[8]{3^{13}} \cdot \sqrt[8]{5^8 \cdot 3^{11}}$.

3. Обчисліть значення виразу:

1) $(2\sqrt[3]{3})^3$; 2) $(-3\sqrt[4]{7})^4$; 3) $(-2\sqrt[8]{11})^8$; 4) $-5\sqrt[7]{8^7}$.

4. Порівняйте числа:

1) $\sqrt[6]{4}$ і $\sqrt[9]{8}$; 2) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$.

5. При яких значеннях змінної c , має зміст вираз:

1) $\sqrt[8]{c(c-5)}$; 2) $\frac{7c}{\sqrt[3]{c(c+6)}}$; 3) $\sqrt[6]{c^2+c-12}$; 4) $\frac{2-c}{\sqrt[4]{6-c-c^2}}$?

6. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{12ab^2}$, $b < 0$; 2) $\sqrt[4]{162a^4b^8c^{12}}$, $a > 0$, $c < 0$;
3) $\sqrt[6]{a^9b^9}$, $a < 0$, $b < 0$; 4) $\sqrt[4]{-81a^7}$.

7. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) p^5 \sqrt[5]{\frac{25}{p^2}}, p < 0; \quad 2) ab \sqrt{\frac{2}{ab}}, a < 0, b < 0; \quad 3) pc^4 \sqrt[4]{\frac{8}{p^2 c^3}}, p < 0.$$

8. При яких значеннях змінних c і p виконується рівність:

$$1) \sqrt{cp^2} = p\sqrt{c}; \quad 2) \sqrt{cp^2} = -p\sqrt{c}; \quad 3) \sqrt{c^3 p^3} = cp\sqrt{cp}?$$

9. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{2}{\sqrt{10}-2}; \quad 2) \frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}; \quad 3) \frac{15}{\sqrt[3]{3}-2}; \quad 4) \frac{20}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}.$$

10. Розмістіть у порядку зростання числа: $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{4}$.

Рівень С

1. Обчисліть:

$$1) 4,5 \sqrt[6]{\frac{1}{64}} - 10 \sqrt[4]{\frac{81}{625}}; \quad 2) \sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{7}};$$

$$3) 14 \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - 6 \sqrt[3]{-0,125}; \quad 4) 10 \sqrt[5]{7\frac{19}{32}} - 9 \sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}.$$

2. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}}; \quad 2) \sqrt[3]{c^4\sqrt{c\sqrt{c}}}; \quad 3) \sqrt[9]{c^5\sqrt{c^3\sqrt{c}}}; \quad 4) \sqrt[10]{c^2\sqrt[5]{c^2\sqrt{c^3}}}.$$

3. Обчисліть:

$$1) \sqrt[3]{7-\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7+\sqrt{22}}; \quad 2) \sqrt[4]{\sqrt{650}-5} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{650}+5};$$

$$3) \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}} - \sqrt{15}; \quad 4) \sqrt{27-10\sqrt{2}} + \sqrt{27+10\sqrt{2}};$$

$$5) \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}; \quad 6) \left(\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \right) \cdot \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}.$$

4. Спростіть:

$$1) \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}}; \quad 2) \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b}};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}}; \quad 4) 8c^5\sqrt[5]{3c^{-4}} - 3\sqrt[5]{96c} - c^2\sqrt[5]{3c^{-9}}.$$

5. При якому значенні m вираз $\left(\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{m-1}} + \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}} \right) \cdot \frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1}}$ набуває найменшого значення?

6. Обчисліть значення виразу $\frac{\sqrt{p}+2}{p\sqrt{p}+2p+4\sqrt{p}} : \frac{1}{p^2-8\sqrt{p}}$, якщо $p = 8,2$.

7. Обчисліть значення виразу $\left(\frac{\frac{3}{c^2}+8}{\frac{1}{c^2}+2} - 2c^{\frac{1}{2}} \right) : \frac{c-4}{12} + \frac{48}{c^{\frac{1}{2}}+2}$, якщо $c = 4,3268$.

8. Якого найбільшого значення набуває вираз $\frac{\sqrt[4]{(a-2)^3}-64}{16-4\cdot\sqrt[4]{a-2}} + \frac{\sqrt{a-2}}{4}$?

Х. Рефлексія (2 хв)

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я знаю властивості арифметичного квадратного кореня. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію застосовувати властивості арифметичного квадратного кореня. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію виконувати тотожні перетворення ірраціональних виразів із квадратними коренями. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю властивості кореня n -го степеня. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію застосовувати властивості кореня n -го степеня. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я вмію виконувати тотожні перетворення ірраціональних виразів із коренями n -го степеня. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я знаю властивості степенів із раціональними показниками. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я вмію виконувати перетворення виразів, що містять степені з раціональними показниками. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |