

## Тема 1.

**Повторення. Числові множини.  
Тотожні перетворення  
раціональних, ірраціональних,  
тригонометричних  
та логарифмічних виразів****Урок 7. Логарифм числа. Властивості логарифмів****РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

**I. Очікувані результати навчальних досягнень**

На уроці ви:

- 1) пригадаєте, для чого вводять поняття логарифма;
- 2) повторите означення логарифма й основну логарифмічну тотожність;
- 3) пригадаєте властивості логарифмів;
- 4) вдосконалисте навички обчислення логарифмічних виразів;
- 5) навчитесь використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

**II. Повторення**

1. Спростіть вираз  $\cos 101^\circ \cos 11^\circ + \sin 101^\circ \sin 11^\circ$ .
2. Спростіть вираз  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(2\pi - \alpha)$ .
3. Скоротіть дробовий вираз  $\frac{5x^3 - 5}{x^2 + x + 1}$ .
4. Розкладіть на множники вираз  $(x^2 - 4)^2 - 25$ .
5. Скоротіть дробовий вираз  $\frac{c - \sqrt[6]{c^5}}{\sqrt[3]{c} - \sqrt[6]{c}}$ .

### III. Логарифм числа

**Означення.** Логарифмом числа  $a$  за основою  $b$  ( $a > 0, b > 0, b \neq 0$ ) називають показник степеня, до якого треба піднести число  $b$ , щоб отримати  $a$ .

Записують так:  $\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x$ .

Наприклад,  $\log_3 81$  — це показник степеня, до якого треба піднести число 3, щоб отримати 81. Отже,  $\log_3 81 = 4$ , бо  $3^4 = 81$ .

**Означення.** Якщо основою логарифма є число 10, то такий логарифм називають **десятковим логарифмом**.

Замість  $\log_{10} a$  записують  $\lg a$ .

**Означення.** Якщо основою логарифма є число  $e \approx 2,718281\dots$ , то такий логарифм називають **натуральним логарифмом**.

Замість  $\log_e a$  записують  $\ln a$ .

**Приклад 1.** Обчисліть  $\log_7 \log_3 \log_2 8$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $\log_2 8 = 3$ , то  $\log_7 \log_3 \log_2 8 = \log_7 \log_3 3$ .

Оскільки  $\log_3 3 = 1$ , то  $\log_7 \log_3 3 = \log_7 1 = 0$ .

*Відповідь.* 0.

### IV. Основна логарифмічна тотожність

Основна логарифмічна тотожність випливає з означення логарифма:

$$b^{\log_b a} = a, (a > 0, b > 0, b \neq 0).$$

Наприклад,  $7^{\log_7 5} = 5$ .

При обчисленні значень логарифмічних виразів із основною логарифмічною тотожністю використовують також властивості степенів:

1)  $a^{c+d} = a^c \cdot a^d$ ;

2)  $a^{c-d} = a^c \cdot a^{-d} = \frac{a^c}{a^d}$ ;

3)  $a^{cd} = (a^c)^d = (a^d)^c$ .

**Приклад 2.** Обчисліть значення виразу  $49^{\log_7 3}$ .

*Розв'язання.*  $49^{\log_7 3} = (7^2)^{\log_7 3} = (7^{\log_7 3})^2 = 3^2 = 9$ .

*Відповідь.* 9.

### VI. Властивості логарифмів

Нехай  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ . Тоді виконуються властивості 1) – 8):

1)  $\log_a 1 = 0$ ;

2)  $\log_a a = 1$ ;

3)  $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$ ;

$$4) \log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|;$$

$$5) \log_a x^n = n \log_a |x|;$$

$$6) \log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a |x|;$$

$$7) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad c > 0, c \neq 1;$$

$$8) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

**Примітка.** Якщо логарифм підносять до степеня, то записують:  $\log_a^n b = (\log_a b)^n$ .

**Приклад 3.** Обчисліть значення виразу  $\log_8^4 4^2$ .

$$\text{Розв'язання. } \log_8^4 4^2 = (\log_8 4^2)^4 = (\log_{2^3} 2^4)^4 = \left(\frac{4}{3} \log_2 2\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}.$$

$$\text{Відповідь. } 3\frac{13}{81}.$$

## VII. Застосування властивостей логарифмів для перетворення логарифмічних виразів

**Означення.** Знаходження логарифмів заданих чисел або виразів називається **логарифмуванням**.

Логарифмувати вирази можна логарифмом за будь-якою додатною основою, крім 1.

**Означення.** Знаходження чисел (виразів) за їхнім логарифмом, називається **по-тенціюванням**.

**Приклад 4.** Прологарифмуйте вираз  $48a\sqrt[3]{ab^5}$  за основою 2.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \log_2(48a\sqrt[3]{ab^5}) &= \log_2 48 + \log_2 a\sqrt[3]{a} + \log_2 b^5 = \\ &= \log_2(2^4 \cdot 3) + \log_2 a^{1+\frac{1}{3}} + \log_2 b^5 = \log_2 2^4 + \log_2 3 + \log_2 a^{\frac{4}{3}} + \log_2 b^5 = \\ &= 4 + \log_2 3 + \frac{4}{3} \log_2 a + 5 \log_2 b. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } 4 + \log_2 3 + \frac{4}{3} \log_2 a + 5 \log_2 b.$$

## VIII. Розв'язування практичної задачі

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Власник підприємства інвестував певну суму коштів у розвиток виробництва. За оцінками економістів, вартість компанії зростає щороку на 12%, завдяки прибутку та реінвестуванню. Через скільки років вартість бізнесу перевищить початкову більш ніж утричі?

## ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

### Рівень А

1. Доведіть, що рівність правильна:

1)  $\log_6 216 = 3$ ;      2)  $\lg 0,001 = -3$ ;      3)  $\ln \frac{1}{e} = -1$ ;      4)  $\log_{13}(11 - 2 \cdot 5) = 0$ .

2. Обчисліть:

1)  $\log_2 32$ ;      2)  $\log_7 \frac{1}{7}$ ;      3)  $\log_{31} 1$ ;      4)  $\lg 100$ .

3. Обчисліть:

1)  $\log_{\frac{1}{2}} 64$ ;      2)  $\log_5 0,04$ ;      3)  $\log_{\sqrt{5}} 25$ ;      4)  $\log_7 \frac{1}{49}$ .

4. Обчисліть:

1)  $\log_5 25 - \log_3 \frac{1}{27}$ ;      2)  $\log_6 216 + \log_8 \sqrt{8}$ .

5. Розв'яжіть рівняння:

1)  $3^x = 6$ ;      2)  $2^{x+1} = 9$ ;      3)  $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 5$ ;      4)  $5^x = 0,5$ .

6. Розв'яжіть рівняння:

1)  $\log_x 243 = 5$ ;      2)  $\log_x 0,04 = -2$ ;      3)  $\lg x = 4$ ;      4)  $\ln 5x = 5$ .

7. Обчисліть:

1)  $7^{\log_7 14}$ ;      2)  $3^{\log_3 5}$ ;      3)  $10^{\lg 80}$ ;      4)  $e^{\ln 5}$ .

8. Знайдіть значення виразу:

1)  $\log_8 16 + \log_8 4$ ;      2)  $\log_6 108 - \log_6 3$ ;      3)  $3^{\frac{1}{\log_7 3}}$ ;      4)  $10^{\frac{1}{\log_7 10}}$ ;  
5)  $\frac{\lg 64}{\lg 8}$ ;      6)  $100^{\lg 20}$ ;      7)  $\log_3 4 \cdot \log_{16} 27$ ;      8)  $\log_7 \log_3 \log_2 8$ .

### Рівень В

1. Знайдіть  $\log_a b$ , якщо:

1)  $\log_{a^4} b = 3$ ;      2)  $\log_a \sqrt[3]{b} = 5$ ;      3)  $\log_b a = 7$ ;      4)  $\log_{b^2} a^3 = 6$ .

2. Обчисліть:

1)  $4^{\log_{16} 9}$ ;      2)  $3^{\log_{\sqrt{3}} 12}$ ;      3)  $10^{\frac{\lg 8 + \lg 9 - \frac{1}{\log_2 10}}{\log_2 10}}$ ;      4)  $\log_{64} \frac{\log_5 81}{\log_5 3}$ .

3. Відомо, що  $\log_{12} 3 = m$ . Знайдіть значення виразу:

1)  $\log_{12} 27$ ;      2)  $\log_{12} 16$ .

4. Обчисліть:

1)  $11^{\frac{1 + \log_{\frac{1}{11}} 5}{11}}$ ;      2)  $5^{2 + \frac{3}{\log_7 25}}$ ;      3)  $32^{\frac{1}{5 \log_6 2}}$ ;      4)  $11^{2 - \frac{3}{2 \lg 11}}$ .

**5.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $8 \cdot 2^{3x} = 11$ ;

2)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{2-x} = \log_{25} 5$ ;

3)  $\log_{2x-1} 0,04 = 2$ ;

4)  $\ln(25 - 2x) = \log_2 32$ .

**6.** Знайдіть  $x$ , якщо:

1)  $\log_{11} x = 2\log_{11} 3 - 0,5\log_{11} 9 + 3\log_{11} 2$ ;

2)  $\lg x = 2\lg 7 - 0,5\lg m + 6\lg \sqrt{c}$ .

**7.** Прологарифмуйте за основою 3 ( $a > 0, b > 0$ ):

1)  $\frac{b^7}{27a^5}$ ;

2)  $\left(\sqrt[5]{a^3 b^7}\right)^{\frac{3}{2}}$ .

**8.** Обчисліть:

1)  $16^{\log_4 2} + 4^{1-2\log_4 2}$ ;

2)  $5^{\frac{3}{\log_7 5}} \cdot \lg \sqrt[3]{0,1}$ ;

3)  $\frac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \cdot \log_2 7 - 2\log_2^2 7}{\log_2 14 + 2\log_2 7}$ ;

4)  $\frac{\log_{35}^2 7 - 2\log_{35} 7 \cdot \log_{35} 5 - 3\log_{35}^2 5}{2(\log_{35} 7 - 3\log_{35} 5)}$ .

### Рівень С

**1.** Знайдіть  $\log_a \frac{b}{a}$ , якщо:

1)  $\log_a b = 12$ ;

2)  $\log_b a = 5$ .

**2.** Знайдіть  $\log_a \frac{1}{b}$ , якщо:

1)  $\log_b \frac{1}{a} = 6$ ;

2)  $\log_{a^2} b^3 = 18$ .

**3.** Знайдіть  $\log_{b^5} \sqrt[3]{a}$ , якщо:

1)  $\log_a \frac{a^2}{b} = 10$ ;

2)  $\log_b \frac{\sqrt{b}}{a^2} = 30$ .

**4.** Обчисліть:

1)  $3^{\log_{\sqrt{3}} 4 - 3\log_3 2}$ ;

2)  $\log_5 128 \log_{19} 5 \log_{\sqrt{2}} 19$ .

**5.** Відомо, що  $\log_3 5 = n$ . Знайдіть значення виразу:

1)  $\log_3 1,25$ ;

2)  $\log_3 \frac{1}{5}$ ;

3)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{125}$ ;

4)  $\log_{\sqrt{25}} \sqrt[3]{3}$ .

**6.** Знайдіть  $x$ , якщо:

1)  $\log_a x = 3\log_a 7 - \frac{5}{4}\log_a b + \frac{1}{6}\log_a c$ ;

2)  $\log_a x = \frac{1}{3}\log_a 5 + 3\log_{a^2} b - \frac{1}{6}\log_a c^6$ .

**7.** Обчисліть:

1)  $\log_{16} (\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ)$ ;

2)  $\frac{1}{\log_8 12} + \frac{1}{\log_{18} 12} + \lg 0,01$ ;

3)  $7^{\frac{4}{\log_{\sqrt{2}} 7} + \frac{1}{3}\log_7 27} + 20\log_5 \sqrt[4]{5\sqrt[5]{5}}$ ;

4)  $\log_7 (5 - 2\sqrt{6}) + \log_7 (5 + 2\sqrt{6})$ ;

$$5) \log_{4-\sqrt{15}}(4 + \sqrt{15});$$

$$6) \frac{2\lg 3 + 2\lg 2 + \lg 6}{2\lg \sqrt{3} + \lg 2};$$

$$7) \log_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 5^\circ + \log_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 25^\circ + \dots + \log_{\frac{\pi}{2}} 65^\circ + \log_{\frac{\pi}{2}} 85^\circ.$$

8. Побудуйте графік функції:

$$1) y = 6^{\log_6(x-3)};$$

$$2) y = \log_{x+4}(x+4);$$

$$3) y = 8^{\frac{2}{\log_x 8}};$$

$$4) y = \log_{\frac{1}{3}} \log_{2-x}(2-x)^9.$$

## Рефлексія

1. Я знаю означення логарифма числа.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю, що таке десятковий логарифм і як він позначається.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я знаю, що таке натуральний логарифм і як він позначається.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я знаю основну логарифмічну тотожність.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я вмію обчислювати числові значення логарифмів.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні







