

Повторення. Числові множини. Тотожні перетворення раціональних, ірраціональних, тригонометричних та логарифмічних виразів

Урок 7. Логарифм числа. Властивості логарифмів

План уроку

1. Логарифм числа.
2. Основна логарифмічна тотожність.
3. Обчислення значень логарифмічних виразів.
4. Властивості логарифмів.
5. Застосування властивостей логарифмів для перетворення логарифмічних виразів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки комплексних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2–1];

розпізнає неповну та надлишкову інформацію, маніпулювання даними, визначає надійність джерел [12 МАО 1.2.1–2];

висловлює ідеї, пов'язані з розумінням комплексної проблемної ситуації [12 МАО 2.4.2–2];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі й шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1];

визначає, аналізує й узагальнює зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу [12 МАО 4.1.1–1];

досліджує та доводить математичні твердження [12 МАО 4.1.2–2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.

- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) За який час подвоїться банківський вклад, якщо відома відсоткова ставка?
- 2) Чи знаєте ви, що спільного між логарифмами та гучністю звуку або силою землетрусу?
- 3) Що спільного мають мушля равлика, соняшник, роги гірського барана і дзьоб папуги?
- 4) Чи пов'язаний рівень кислотності речовини з логарифмами?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз $\cos 101^\circ \cos 11^\circ + \sin 101^\circ \sin 11^\circ$.

Відповідь. 0.

2. Спростіть вираз $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(2\pi - \alpha)$.

Відповідь. 0.

3. Скоротіть дробовий вираз $\frac{5x^3 - 5}{x^2 + x + 1}$.

Відповідь. $5x - 5$.

4. Розкладіть на множники вираз $(x^2 - 4)^2 - 25$.

Відповідь. $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$.

5. Скоротіть дробовий вираз $\frac{c - \sqrt[6]{c^5}}{\sqrt[3]{c} - \sqrt[6]{c}}$.

Відповідь. $\sqrt[3]{c^2}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Власник підприємства інвестував певну суму коштів у розвиток виробництва. За оцінками економістів, вартість компанії зростає щороку на 12%, завдяки прибутку та реінвестуванню. Через скільки років вартість бізнесу перевищить початкову більш ніж утричі?

III. Логарифм числа (4–5 хв)

Означення. Логарифмом числа a за основою b ($a > 0, b > 0, b \neq 0$) називають показник степеня, до якого треба піднести число b , щоб отримати a .

Записують так: $\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x$.

Наприклад, $\log_3 81$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 3, щоб отримати 81. Отже, $\log_3 81 = 4$, бо $3^4 = 81$.

Означення. Якщо основою логарифма є число 10, то такий логарифм називають **десятиковим логарифмом**.

Замість $\log_{10} a$ записують $\lg a$.

Означення. Якщо основою логарифма є число $e \approx 2,718281\dots$, то такий логарифм називають **натуральним логарифмом**.

Замість $\log_e a$ записують $\ln a$.

Ілюстративні приклади

6. Обчисліть $\log_7 \log_3 \log_2 8$.

Розв'язання. Оскільки $\log_2 8 = 3$, то $\log_7 \log_3 \log_2 8 = \log_7 \log_3 3$.

Оскільки $\log_3 3 = 1$, то $\log_7 \log_3 3 = \log_7 1 = 0$.

Відповідь. 0.

7. Обчисліть $\lg \sqrt[5]{0,01}$.

Розв'язання. Нехай $\lg \sqrt[5]{0,01} = x$, тоді $10^x = \sqrt[5]{0,01}$, $10^x = 10^{-\frac{2}{5}}$, $x = -\frac{2}{5}$.

Відповідь. $-\frac{2}{5}$.

8. Обчисліть значення виразу $\log_{81} 729$.

Розв'язання. Нехай $\log_{81} 729 = x$, тоді, за означенням логарифма, $81^x = 729$, $3^{4x} = 3^6$, тому $4x = 6$, $x = 1,5$.

Відповідь. 1,5.

9. Розв'яжіть рівняння $\log_{x-1} 25 = 2$.

Розв'язання. Із рівності $\log_{x-1} 25 = 2$, за означенням логарифма, випливає рівність $(x-1)^2 = 25$, $x > 1$, $x \neq 2$. Звідси, $x = -4 < 1$ або $x = 6$.

Тому $x = -4$ — сторонній корінь. Отже, $x = 6$.

Відповідь. 6.

IV. Основна логарифмічна тотожність (4–5 хв)

Основна логарифмічна тотожність випливає з означення логарифма:

$$b^{\log_b a} = a, (a > 0, b > 0, b \neq 0).$$

Наприклад, $7^{\log_7 5} = 5$.

При обчисленні значень логарифмічних виразів із основною логарифмічною тотожністю використовують також властивості степенів:

$$1) a^{c+d} = a^c \cdot a^d;$$

$$2) a^{c-d} = a^c \cdot a^{-d} = \frac{a^c}{a^d};$$

$$3) a^{cd} = (a^c)^d = (a^d)^c.$$

Ілюстративні приклади

10. Обчисліть значення виразу $49^{\log_7 3}$.

$$\text{Розв'язання. } 49^{\log_7 3} = (7^2)^{\log_7 3} = (7^{\log_7 3})^2 = 3^2 = 9.$$

Відповідь. 9.

11. Обчисліть значення виразу $6^{2-2\log_6 3}$.

$$\text{Розв'язання. } 6^{2-2\log_6 3} = 6^2 \cdot (6^{\log_6 3})^{-2} = 36 : 3^2 = 36 : 9 = 4.$$

Відповідь. 4.

VI. Властивості логарифмів (5–7 хв)

Нехай $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$. Тоді виконуються властивості 1) – 8):

$$1) \log_a 1 = 0;$$

$$2) \log_a a = 1;$$

$$3) \log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|;$$

$$4) \log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|;$$

$$5) \log_a x^n = n \log_a |x|;$$

$$6) \log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a |x|;$$

$$7) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c > 0, c \neq 1;$$

$$8) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Примітка. Якщо логарифм підносять до степеня, то записують: $\log_a^n b = (\log_a b)^n$.

Ілюстративні приклади

- 12.** Обчисліть значення виразу $\log_8^4 4^2$.

Розв'язання. $\log_8^4 4^2 = (\log_8 4^2)^4 = (\log_{2^3} 2^4)^4 = \left(\frac{4}{3} \log_2 2\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}$.

Відповідь. $3\frac{13}{81}$.

- 13.** Обчисліть значення виразу $\frac{2\lg 6 - \lg 2}{\lg 12 + 3\lg 3}$.

Розв'язання. $\frac{2\lg 6 - \lg 2}{\lg 12 + 3\lg 3} = \frac{\lg 6^2 - \lg 2}{\lg 12 + \lg 3^3} = \frac{\lg (36 : 2)}{\lg (12 \cdot 27)} = \frac{\lg 18}{\lg 324} = \frac{\lg 18}{\lg 18^2} = \frac{\lg 18}{2\lg 18} = 0,5$.

Відповідь. 0,5.

- 14.** Обчисліть значення виразу $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$.

Розв'язання. Зведемо логарифми до основи 2:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}, \log_5 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 5}, \log_7 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 7}.$$

$$\text{Тоді } \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7} = \log_2 8 = 3.$$

Відповідь. 3.

VII. Застосування властивостей логарифмів для перетворення логарифмічних виразів

Означення. Знаходження логарифмів заданих чисел або виразів називається **логарифмуванням**.

Логарифмувати вирази можна логарифмом за будь-якою додатною основою, крім 1.

Означення. Знаходження чисел (виразів) за їхнім логарифмом, називається **по-тенціюванням**.

Ілюстративні приклади

- 15.** Прологарифмуйте вираз $48a\sqrt[3]{ab^5}$ за основою 2.

Розв'язання. $\log_2 (48a\sqrt[3]{ab^5}) = \log_2 48 + \log_2 a\sqrt[3]{a} + \log_2 b^5 =$
 $= \log_2 (2^4 \cdot 3) + \log_2 a^{1+\frac{1}{3}} + \log_2 b^5 = \log_2 2^4 + \log_2 3 + \log_2 a^{\frac{4}{3}} + \log_2 b^5 =$
 $= 4 + \log_2 3 + \frac{4}{3}\log_2 a + 5\log_2 b.$

Відповідь. $4 + \log_2 3 + \frac{4}{3}\log_2 a + 5\log_2 b.$

16. Знайдіть число x за даним його логарифмом $\lg x = \lg 7^{-\frac{1}{2}} + \lg \sqrt{7^3} - \lg \frac{1}{49}$.

Розв'язання. $\lg x = \lg 7^{-\frac{1}{2}} + \lg \sqrt{7^3} - \lg \frac{1}{49},$

$$\lg x = \lg 7^{-\frac{1}{2}} + \lg 7^{\frac{3}{2}} - \lg 7^{-2},$$

$$\lg x = \lg \left(7^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{3}{2}} : 7^{-2} \right),$$

$$\lg x = \lg 7^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - (-2)}, \lg x = \lg 7^3, \text{ тому } x = 343.$$

Відповідь. 343.

VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Власник підприємства інвестував певну суму коштів у розвиток виробництва. За оцінками економістів, вартість компанії зростає щороку на 12%, завдяки прибутку та реінвестуванню. Через скільки років вартість бізнесу перевищить початкову більш ніж утричі?

Розв'язання. Задамо приріст вартості підприємства за формулою складних відсотків: $S = S_0(1 + p)^t$, де S — майбутня вартість, S_0 — початкова вартість, p — річна ставка приросту, t — кількість років.

За умовою, $S > 3S_0$, $p = 12\%$.

Підставимо у формулу: $3S_0 = S_0(1 + 0,12)^t$, звідси $3 = 1,12^t$.

Прологарифмуємо вираз за основою e : $\ln 3 = \ln 1,12^t$, $\ln 3 = t \ln 1,12$.

За допомогою калькулятора, обчислимо: $t = \frac{\ln 3}{\ln 1,12} \approx 9,7$.

Отже, приблизно через 9,7 років або 10 років (з урахуванням нерівності $S > 3S_0$) вартість бізнесу перевищить початкову більш ніж утричі.

Відповідь. Через 10 років.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Доведіть, що рівність правильна:

$$1) \log_6 216 = 3; \quad 2) \lg 0,001 = -3; \quad 3) \ln \frac{1}{e} = -1; \quad 4) \log_{13}(11 - 2 \cdot 5) = 0.$$

2. Обчисліть:

$$1) \log_2 32; \quad 2) \log_7 \frac{1}{7}; \quad 3) \log_{31} 1; \quad 4) \lg 100.$$

3. Обчисліть:

$$1) \log_{\frac{1}{2}} 64; \quad 2) \log_5 0,04; \quad 3) \log_{\sqrt{5}} 25; \quad 4) \log_7 \frac{1}{49}.$$

4. Обчисліть:

1) $\log_5 25 - \log_3 \frac{1}{27}$;

2) $\log_6 216 + \log_8 \sqrt{8}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 6$;

2) $2^{x+1} = 9$;

3) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 5$;

4) $5^x = 0,5$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 243 = 5$;

2) $\log_x 0,04 = -2$;

3) $\lg x = 4$;

4) $\ln 5x = 5$.

7. Обчисліть:

1) $7^{\log_7 14}$;

2) $3^{\log_3 5}$;

3) $10^{\lg 80}$;

4) $e^{\ln 5}$.

8. Знайдіть значення виразу:

1) $\log_8 16 + \log_8 4$;

2) $\log_6 108 - \log_6 3$;

3) $3^{\frac{1}{\log_7 3}}$;

4) $10^{\frac{1}{\log_7 10}}$;

5) $\frac{\lg 64}{\lg 8}$;

6) $100^{\lg 20}$;

7) $\log_3 4 \cdot \log_{16} 27$;

8) $\log_7 \log_3 \log_2 8$.

Рівень В

1. Знайдіть $\log_a b$, якщо:

1) $\log_{a^4} b = 3$;

2) $\log_a \sqrt[3]{b} = 5$;

3) $\log_b a = 7$;

4) $\log_{b^2} a^3 = 6$.

2. Обчисліть:

1) $4^{\log_{16} 9}$;

2) $3^{\log_{\sqrt{3}} 12}$;

3) $10^{\lg 8 + \lg 9 - \frac{1}{\log_2 10}}$;

4) $\log_{64} \frac{\log_5 81}{\log_5 3}$.

3. Відомо, що $\log_{12} 3 = m$. Знайдіть значення виразу:

1) $\log_{12} 27$;

2) $\log_{12} 16$.

4. Обчисліть:

1) $11^{\frac{1+\log_{11} 5}{11}}$;

2) $5^{\frac{2+\frac{3}{\log_7 25}}{25}}$;

3) $32^{\frac{1}{5 \log_6 2}}$;

4) $11^{\frac{2-\frac{3}{2 \lg 11}}{11}}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $8 \cdot 2^{3x} = 11$;

2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2-x} = \log_{25} 5$;

3) $\log_{2x-1} 0,04 = 2$;

4) $\ln(25 - 2x) = \log_2 32$.

6. Знайдіть x , якщо:

1) $\log_{11} x = 2 \log_{11} 3 - 0,5 \log_{11} 9 + 3 \log_{11} 2$;

2) $\lg x = 2 \lg 7 - 0,5 \lg m + 6 \lg \sqrt{c}$.

7. Прологарифмуйте за основою 3 ($a > 0$, $b > 0$):

1) $\frac{b^7}{27a^5}$;

2) $\left(\sqrt[5]{a^3 b^7}\right)^{\frac{3}{2}}$.

8. Обчисліть:

1) $16^{\log_4 2} + 4^{1-2 \log_4 2}$;

2) $5^{\frac{3}{\log_7 5}} \cdot \lg \sqrt[3]{0,1}$;

3) $\frac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \cdot \log_2 7 - 2 \log_2^2 7}{\log_2 14 + 2 \log_2 7}$;

4) $\frac{\log_{35}^2 7 - 2 \log_{35} 7 \cdot \log_{35} 5 - 3 \log_{35}^2 5}{2(\log_{35} 7 - 3 \log_{35} 5)}$.

Рівень С

1. Знайдіть $\log_a \frac{b}{a}$, якщо:
 - 1) $\log_a b = 12$;
 - 2) $\log_b a = 5$.
2. Знайдіть $\log_a \frac{1}{b}$, якщо:
 - 1) $\log_b \frac{1}{a} = 6$;
 - 2) $\log_{a^2} b^3 = 18$.
3. Знайдіть $\log_{b^5} \sqrt[3]{a}$, якщо:
 - 1) $\log_a \frac{a^2}{b} = 10$;
 - 2) $\log_b \frac{\sqrt{b}}{a^2} = 30$.
4. Обчисліть:
 - 1) $3^{\log_{\sqrt{3}} 4 - 3 \log_3 2}$;
 - 2) $\log_5 128 \log_{19} 5 \log_{\sqrt{2}} 19$.
5. Відомо, що $\log_3 5 = n$. Знайдіть значення виразу:
 - 1) $\log_3 1,25$;
 - 2) $\log_3 \frac{1}{5}$;
 - 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{125}$;
 - 4) $\log_{\sqrt{25}} \sqrt[3]{3}$.
6. Знайдіть x , якщо:
 - 1) $\log_a x = 3 \log_a 7 - \frac{5}{4} \log_a b + \frac{1}{6} \log_a c$;
 - 2) $\log_a x = \frac{1}{3} \log_a 5 + 3 \log_{a^2} b - \frac{1}{6} \log_a c^6$.
7. Обчисліть:
 - 1) $\log_{16} (\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ)$;
 - 2) $\frac{1}{\log_8 12} + \frac{1}{\log_{18} 12} + \lg 0,01$;
 - 3) $7^{\frac{4}{\log_{\sqrt{2}} 7} + \frac{1}{3} \log_7 27} + 20 \log_5 \sqrt[4]{5^5 \sqrt{5}}$;
 - 4) $\log_7 (5 - 2\sqrt{6}) + \log_7 (5 + 2\sqrt{6})$;
 - 5) $\log_{4-\sqrt{15}} (4 + \sqrt{15})$;
 - 6) $\frac{2 \lg 3 + 2 \lg 2 + \lg 6}{2 \lg \sqrt{3} + \lg 2}$;
 - 7) $\log_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 5^\circ + \log_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 25^\circ + \dots + \log_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 65^\circ + \log_{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 85^\circ$.
8. Побудуйте графік функції:
 - 1) $y = 6^{\log_6 (x-3)}$;
 - 2) $y = \log_{x+4} (x+4)$;
 - 3) $y = 8^{\frac{2}{\log_x 8}}$;
 - 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} \log_{2-x} (2-x)^9$.

Х. Рефлексія (2 хв)

1. Я знаю означення логарифма числа.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я знаю, що таке десятковий логарифм і як він позначається.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----

