

Повторення. Функції та їхні властивості

Урок 1. Функція. Властивості функцій. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

План уроку

1. Види функцій.
2. Способи задання функції.
3. Область визначення і множина значень функції.
4. Нулі функції, парність та непарність функції, знакосталість функції, монотонність, найбільше та найменше значення функції.
5. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній комплексній проблемній ситуації її складові частини, що можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–2];

самостійно або у співпраці з іншими обирає математичну модель розв'язання проблемної ситуації з урахуванням різних умов, зокрема бажаної точності результату та ресурсів, необхідних для застосування цієї моделі, на засадах ощадливості та поміркованості [12 МАО 3.2.2–1];

оперує математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу на ілюстративних прикладах.
- 2) При поясненні матеріалу наводьте лаконічні означення та приклади. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 3) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

5) Виділіть час на розв'язування тренувальних вправ, спрямованих на формування практичних навиків та навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Повторення (3–4 хв)

1. Графік довільної функції $y = f(x)$ паралельно перенесли вздовж осі ординат на 3 одиниці вниз. Графік якої з наведених функцій отримали?

А	Б	В	Г	Д
$y = f(x + 3)$	$y = f(x) + 3$	$y = 3f(x)$	$y = f(x) - 3$	$y = f(x - 3)$

Відповідь. Г.

2. Графік функції $y = \sqrt{x}$ перенесли на 2 одиниці ліворуч уздовж осі x . Укажіть функцію, графік якої отримали в результаті паралельного перенесення.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{2-x}$	$y = \sqrt{x} - 2$	$y = \sqrt{x-2}$	$y = \sqrt{x+2}$	$y = \sqrt{x} + 2$

Відповідь. Г.

3. Знайдіть значення функції $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$ у точках: -1 ; 2 ; 0 ; 1 .

Відповідь. -4 ; $6,5$; не існує; 4 .

4. Дано функцію $f(x) = x^2 - 2x$. Порівняйте $f(0)$ і $f(2)$.

Відповідь. $f(0) = f(2)$.

5. Знайдіть нулі функції $y = 3(x^2 - 4)$.

Відповідь. 2 ; -2 .

III. Види функцій

Якщо розглядають функцію $f(x)$ із незалежною змінною x і залежною змінною y , то говорять, що змінна y *функціонально залежить* від змінної x .

У такому випадку записують: $y = f(x)$.

Незалежну змінну називають *аргументом функції*, а залежну змінну — *значенням функції* або *функцією* від цього аргументу.

Види функцій

1. Функція, що задається багаточленом, тобто функція виду $f(x) = P(x)$, де $P(x)$ — багаточлен.

Частинними випадками таких функцій є:

- 1) лінійна функція (багаточлен першого степеня);
- 2) квадратична функція (багаточлен другого степеня).

- 2.** Дробово-раціональні функції, тобто функції виду $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$, $Q(x)$ — багаточлени.

Частинними випадками таких функцій є:

- 1) обернена пропорційність;
- 2) функція виду $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d — числа.

- 3.** Степенева функція.

- 4.** Ірраціональні функції, тобто функції виду $y = \sqrt{P(x)}$, де $P(x)$ — багаточлен.

- 5.** Тригонометричні функції.

- 6.** Обернені тригонометричні функції.

- 7.** Показникова функція.

- 8.** Логарифмічна функція.

IV. Способи задання функції

Функцію можна задати:

- описовим способом;
- табличним способом;
- формулою;
- графічним способом.

Розглянемо табличний спосіб задання функції (див. таблицю). Із таблиці можна безпосередньо знайти значення функції, але тільки для скінченного набору значень аргументу.

Час t , год	9	10	11	12	13	14	15
Атмосферний тиск p , мм. рт. ст.	754	755	757	755	754	753	754

Область визначення функції утворюють числа 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, тобто числа першого рядка таблиці, а множину значень: 753, 754, 755, 757 — числа другого рядка таблиці.

Задання функції формулою є найважливішим, адже дає змогу для довільного значення аргументу з області визначення функції обчислити відповідне значення функції та в багатьох випадках виконати обернену задачу.

Наприклад: $y = x^2 - 2x + 3$, $y = \frac{x-2}{x+1}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $E_k = 25v^2$, $P = 200000 \cdot 0,95^t$ — функції задано формулами.

Означення. Графіком функції $f(x)$ називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції $f(x)$.

Для графіка функції $y = f(x)$ виконуються умови 1) – 2).

1) Якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку.

2) Якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції $f(x)$, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Ілюстративні приклади

6. Функцію задано формулою $g(x) = \frac{2-x}{2+x}$. Знайдіть:

1) $g(-1)$;

2) значення x , при якому $g(x) = -5$.

Розв'язання. 1) $g(-1) = \frac{2-(-1)}{2+(-1)} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$.

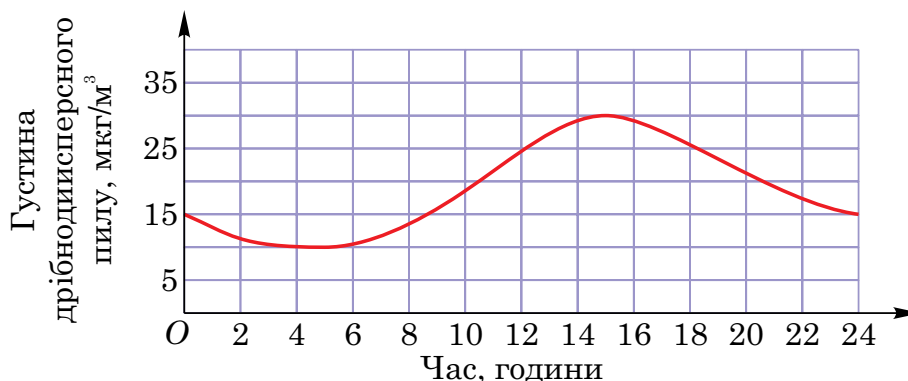
2) Якщо $g(x) = -5$, то $\frac{2-x}{2+x} = -5$.

Тоді: $\frac{2-x}{2+x} + 5 = 0$, звідси $\frac{2-x+5(2+x)}{2+x} = 0$, $\frac{2-x+10+5x}{2+x} = 0$,

$2-x+10+5x = 0$, $x \neq -2$, $-x+5x = -12$, $4x = -12$, $x = -3$.

Відповідь. $g(-1) = 3$; $x = -3$.

7. На рисунку відображено зміну густини (мкг/м³) дрібнодисперсного пилу в повітрі впродовж доби в деякому районі міста. Укажіть із-поміж наведених проміжків проміжок часу (год), упродовж якого густина такого пилу в повітрі лише зменшувалася. (НМТ, 2024 р.).



А	Б	В	Г	Д
[2; 6]	[8; 12]	[12; 14]	[14; 16]	[20; 24]

Відповідь. Д.

V. Область визначення і множина значень функції

Означення. *Областю визначення* функції (ОВФ) називається множина значень незалежної змінної, або проєкція графіка на вісь Ox . Позначають ОВФ через $D(f)$.

Область визначення функції відповідає області допустимих значень відповідного алгебричного виразу і позначається $D(y)$.

Для того, щоб знайти ОВФ, потрібно розв'язати нерівність або систему нерівностей. Існують загальні правила знаходження областей визначення функцій, тобто складання нерівностей або їхніх систем.

Розглянемо деякі з цих правил.

1. Якщо $y = P(x)$, де $P(x)$ — багаточлен від однієї змінної x , то $D(y) = R$.
2. Якщо $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — багаточлени від однієї змінної x , то $D(y) = R$, крім коренів знаменника, тобто коренів рівняння $Q(x) = 0$.
3. Якщо $y = \sqrt{P(x)}$, де $P(x)$ — багаточлен від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати нерівність $P(x) \geq 0$.
4. Якщо $y = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — багаточлени від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати нерівність $Q(x) > 0$.
5. Якщо $y = \sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — багаточлени від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати систему нерівностей:
$$\begin{cases} P(x) \geq 0, \\ Q(x) \geq 0. \end{cases}$$

Примітка. Якщо між коренями парного степеня буде дія множення або ділення, то отримаємо аналогічну систему. Лише при дії ділення підкореневий вираз знаменника строго більший за 0.

Означення. Областю (множиною) значень функції (ОЗФ) називається множина значень залежної змінної, або проекція графіка на вісь Oy . Множину значень функції позначають $E(y)$.

ОЗФ визначають за графіком функції або дослідженням функції на монотонність та знаходженням найбільшого (найменшого) значень, або розв'язанням рівняння з параметром, у якому змінна y виконує роль параметра.

Приклад 1. Для лінійної функції $f(x) = 2x + 1$ областю визначення є множина дійсних чисел R . Множина значень функції — множина дійсних чисел R .

Приклад 2. Для квадратичної функції $f(x) = x^2$ областю визначення є множина дійсних чисел R . Множина значень функції — $x \in [0; +\infty)$.

Ілюстративні приклади (7–8 хв)

8. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{3x - x^2} - \frac{2x}{x - 2}$.

Розв'язання. $D(y) : \begin{cases} 3x - x^2 \geq 0, & \begin{cases} x \in [0; 3], \\ x \neq 2. \end{cases} \end{cases}$

Отже, $x \in [0; 2) \cup (2; 3]$.

Відповідь. $x \in [0; 2) \cup (2; 3]$.

9. Знайдіть суму найбільшого і найменшого значень функції $y(x) = 5 - 3 \sin \frac{x}{4}$.

Розв'язання. Оскільки $E(\sin x) = [-1; 1]$, тобто $-1 \leq \sin \frac{x}{4} \leq 1$, то $-3 \leq -3 \sin \frac{x}{4} \leq 3$.

Звідси $-3 + 5 \leq -3 \sin \frac{x}{4} + 5 \leq 3 + 5$, а тому $2 \leq -3 \sin \frac{x}{4} + 5 \leq 8$, $2 \leq y \leq 8$.

Отже, множина значень функції $E(y)$: $y \in [2; 8]$, а сума найменшого і найбільшого значень функції становить 10.

Відповідь. 10.

VI. Нулі функції

Означення. Точки, в яких функція $y = f(x)$ перетворюється в 0, тобто корені рівняння $f(x) = 0$, називають **нулями функції**.

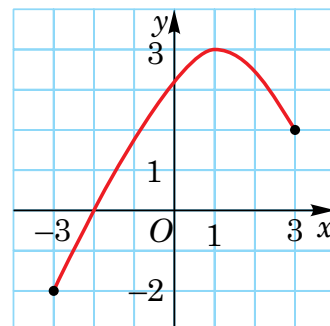
Якщо побудований графік функції, то нулі функції — це точки перетину графіка з віссю Ox .

Ілюстративний приклад

10. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 3]$. Укажіть нуль цієї функції. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
-3	-2	0	3	4

Відповідь. Б.

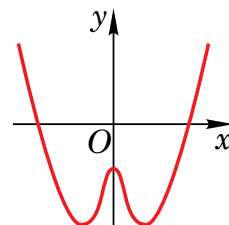


VII. Парність та непарність функції

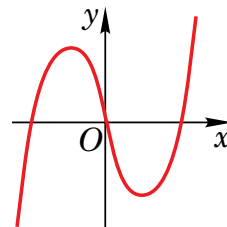
Означення. Функція називається **парною**, якщо виконується рівність $f(-x) = f(x)$, для всіх x із області її визначення.

Означення. Функція називається **непарною**, якщо виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, для всіх x із області її визначення.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (див. рисунок).



Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (див. рисунок).



Для того, щоб перевірити функцію на парність, потрібно дослідити пункти 1) – 5).

1) У виразах, куди входить x , замінити x на $(-x)$. Важливо, щоб аргумент $(-x)$ був записаний у дужках.

2) Розкрити дужки, виконати спрощення.

3) Якщо в результаті спрощень отримаємо ту саму формулу, яка задана, то функція — парна.

4) Якщо ні, то потрібно винести знак “мінус” перед формулою функції та перевірити умову $f(-x) = -f(x)$. Якщо ця умова виконується, то функція — непарна.

5) Якщо ні перший, ні другий випадки не виконуються, то функція ні парна, ні непарна.

Ілюстративний приклад (2–3 хв)

11. Дослідіть функцію $f(x) = 2\sin 3x \cdot \cos 5x$ на парність.

Розв’язання. Для цього знайдемо $f(-x)$: $f(-x) = 2\sin 3(-x) \cdot \cos 5(-x)$,

$f(-x) = 2\sin (-3x) \cdot \cos (-5x)$, $f(-x) = 2(-\sin 3x) \cdot \cos 5x$, $f(-x) = -2\sin 3x \cdot \cos 5x$.

Оскільки $f(-x) = -f(x)$, то функція є непарною.

Відповідь. Функція непарна.

VIII. Проміжки сталого знака (знакосталості) функції

Означення. *Проміжками знакосталості* функції називають проміжки, на яких функція зберігає сталий знак, тобто це проміжки, на яких функція додатна (від’ємна), або, інакше, розв’язки нерівності $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Примітка. Щоб дослідити функцію на знакосталість, треба розв’язати нерівність. Якщо $f(x) > 0$, то функція набуває додатних значень. Якщо $f(x) < 0$, то функція набуває від’ємних значень.

Ілюстративний приклад

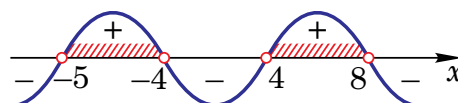
12. Знайдіть проміжки знакосталості функції $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 40}{16 - x^2}$.

Розв’язання. Використаємо метод інтервалів. Для цього знайдемо нулі функції

і точки, які не належать області визначення функції:
$$\begin{cases} x^2 - 3x - 40 = 0, \\ 16 - x^2 \neq 0. \end{cases}$$

Звідси, $x = -5$, $x = 8$, $x \neq -4$, $x \neq 4$.

Функція набуває додатних значень, якщо $x \in (-5; -4) \cup (4; 8)$.



Функція набуває від'ємних значень, якщо $x \in (-\infty; -5) \cup (-4; 4) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь. Якщо $x \in (-5; -4) \cup (4; 8)$, то функція набуває додатних значень.

Якщо $x \in (-\infty; -5) \cup (-4; 4) \cup (8; +\infty)$, то функція набуває від'ємних значень.

IX. Монотонність функції

Означення. Функція називається **зростаючою** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.

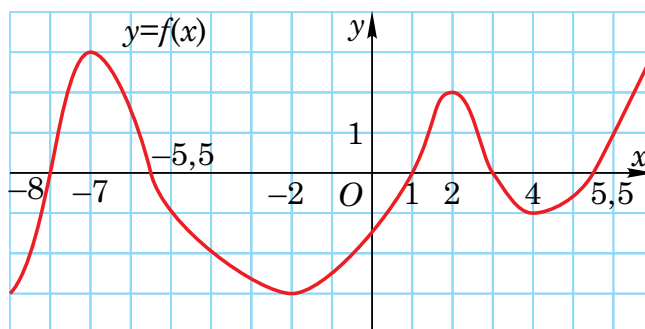
Графік зростаючої функції прямує вгору, якщо рухатися по осі Ox у додатному напрямку.

Означення. Функція називається **спадною** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

Графік спадної функції прямує вниз, якщо рухатися по осі Ox у додатному напрямку.

Ілюстративний приклад

- 13.** За графіком деякої функції $y = f(x)$ (див. рисунок), визначеної на множині дійсних чисел, укажіть інтервали знакосталості функції та інтервали монотонності функції.



Розв'язання. 1) На інтервалах $(-8; -5,5)$, $(1; 3)$ і $(5,5; +\infty)$ графік функції лежить над віссю Ox , тобто функція набуває додатних значень (ординати точок графіка додатні).

На інтервалах $(-\infty; -8)$, $(-5,5; 1)$ і $(3; 5,5)$ графік функції лежить нижче осі Ox , тобто функція набуває від'ємних значень (ординати точок графіка від'ємні).

2) Визначимо проміжки монотонності функції.

Якщо $x \in (-\infty; -7]$ і $x \in [-2; 2]$ і $x \in [4; +\infty)$, то функція зростає, оскільки графік прямує вгору. Якщо $x \in [-7; -2]$ і $x \in [2; 4]$, то функція спадає, оскільки графік прямує донизу. Напрямок руху по графіку задає вісь Ox .

X. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

Методи побудови графіків функцій:

- геометричні перетворення графіка функції $y = f(x)$;
- перетворення формули, що задає функцію;

- побудова графіка за допомогою властивостей похідних від функцій.

При побудові графіків функцій виду: $y = f(x) + n$, $y = f(kx)$, $y = f(kx \pm b)$, $y = a f(kx \pm b)$ виконуються геометричні перетворення графіків початкових функцій.

Примітка. Початкові функції (або «базові») — це функції виду:

$$y = \frac{k}{x}, y = x^2, y = x^3, y = \sqrt{x}, y = \sin x, y = \log_a x \text{ тощо.}$$

1. Щоб побудувати графік функції $y = f(x) + a$, де a — будь-яке число, потрібно виконати паралельне перенесення графіка початкової функції $f(x)$ уздовж осі Oy на a одиниць вгору, якщо $a > 0$, або на a одиниць вниз, якщо $a < 0$.
2. Щоб побудувати графік функції $y = f(x - a)$, де a — будь-яке число, потрібно виконати паралельне перенесення графіка початкової функції $f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць. Якщо в дужках знак «-», то зміщуємо графік на a одиниць праворуч. Якщо в дужках знак «+», то зміщуємо графік на a одиниць ліворуч.
3. Щоб побудувати графік функції $y = -f(x)$, потрібно графік початкової функції $f(x)$ симетрично відобразити відносно осі Ox .
4. Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$, потрібно графік початкової функції $f(x)$ симетрично відобразити відносно осі Oy .
5. Щоб побудувати графік функції $y = k \cdot f(x)$, де k — будь-яке додатне число, потрібно графік початкової функції $f(x)$ розтягнути в k разів відносно осі Ox , якщо $k > 1$ або стиснути до осі Ox в k разів, якщо $k < 1$.
6. Щоб побудувати графік функції $y = f(kx)$, де k — будь-яке додатне число, потрібно графік початкової функції $f(x)$ стиснути до осі Oy в k разів, якщо $k > 1$, або розтягнути в k разів відносно осі Oy , якщо $k < 1$.
7. Щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$, потрібно ту частину графіка, яка знаходиться над віссю Ox , залишити без змін, а ту, яка знаходиться нижче осі Ox , симетрично відобразити відносно цієї осі («перекинути» вгору).
8. Щоб побудувати графік функції $y = f(|x|)$, потрібно ту частину графіка, яка лежить праворуч від осі Oy , залишити без змін, а ту, що ліворуч, — стерти, і в цій півплощині побудувати графік, симетричний графіку, що залишився в правій півплощині відносно осі Oy (або розкрити модуль).

Примітка. При побудові графіків методом геометричних перетворень можна «проміжні» графіки будувати один під одним, з «єдиною» віссю Oy .

Ілюстративний приклад (5–7 хв)

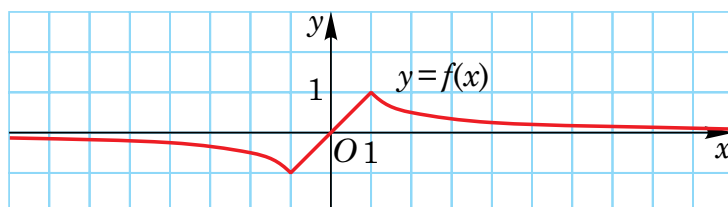
- 14*.** Розв'яжіть рівняння $\frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|} = a$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. Побудуємо графік лівої і правої частин рівняння. Графіком правої частини рівняння $y = a$ є пряма, паралельна осі Ox . Для побудови графіка лівої частини рівняння потрібно розкрити модулі.

Оскільки коренями модулів є числа -1 і 1 , то:

- 1) при $x \leq -1$ отримаємо $\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|} = \frac{1}{x}$;
- 2) при $-1 < x < 1$ отримаємо $\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|} = x$;
- 3) при $x > 1$ отримаємо $\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|} = \frac{1}{x}$.

Побудуємо графік лівої частини рівняння (див. рисунок).



- 1) Якщо $a > 1$ або $a < -1$, то графіки не перетинаються, тобто рівняння не має коренів.
- 2) Якщо $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$, то графіки перетинаються лише в одній точці. Тоді рівняння має один корінь при $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$.
- 3) Якщо $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, то графіки перетинаються у двох точках. Тобто рівняння має два корені.

Відповідь. 1) Якщо $a > 1$ або $a < -1$, то рівняння не має коренів.

2) Якщо $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$, то рівняння має один корінь.

3) Якщо $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, то рівняння має два корені.

XI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть область визначення функції $y = 2 - \frac{1}{x}$. (ЗНО, 2012 р.).

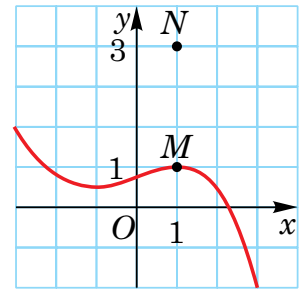
А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. Функція $y = f(x)$ є спадною на інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Укажіть правильну нерівність. (ЗНО, 2011 р.).

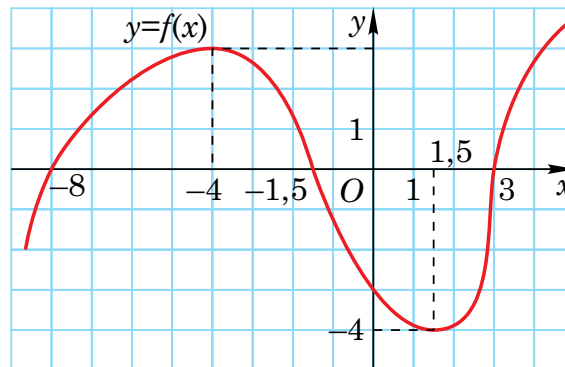
А	Б	В	Г	Д
$f(1) > f(-1)$	$f(1) < f(8)$	$f(1) > f(0)$	$f(-1) < f(0)$	$f(1) > f(10)$

3. Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $M(1; 1)$ (див. рисунок). При якому значенні a графік функції $y = f(x) + a$ проходить через точку $N(1; 3)$? (ЗНО, 2009 р.).

А	Б	В	Г	Д
$a = 2$	$a = -2$	$a = \frac{1}{3}$	$a = 3$	не існує



4. На рисунку побудовано графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Укажіть інтервали, на яких функція набуває додатних значень



А	Б	В	Г	Д
$(-4; 1,5)$	$(-8; -1,5)$	$(1,5; +\infty)$	$(-8; -1,5) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup (1,5; +\infty)$

5. За даними рисунка завдання 4 знайдіть суму всіх нулів функції.

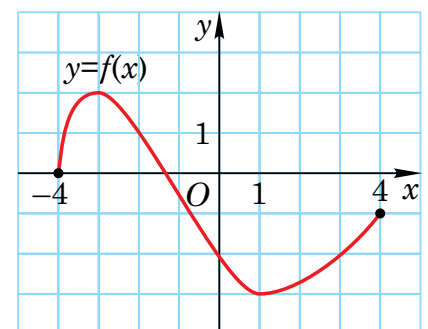
А	Б	В	Г	Д
3	-9,5	-2,5	-6,5	8,5

6. За даними рисунка завдання 4 знайдіть проміжки спадання функції.

А	Б	В	Г	Д
$[-4; 1,5]$	$[-8; -1,5]$	$[3; +\infty)$	$[-8; -1,5]$	$(-\infty; -4) \cup [1,5; +\infty)$

7. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Знайдіть множину всіх значень x , для яких $f(x) \leq -2$. (ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
$[0; 3]$	$[-3; 2]$	$[-1; 4]$	$[-3; -2]$	$[-4; 0]$



8. Які з наведених функцій 1) $f(x) = -x^3$, 2) $y = 4x - x^2$, 3) $f(x) = x^4 - 2x^2$, 4) $f(x) = \sqrt{x}$, 5) $f(x) = x^2 - 2$ — парні?

А	Б	В	Г	Д
1), 2)	3), 4)	3), 4), 5)	3), 5)	усі, крім 1)

9. Яка з функцій: 1) $y = x^2 - 4x + 4$, 2) $y = -\frac{4}{x}$, 3) $y = 3 - 4x$, 4) $y = \sqrt{x+3}$ зростає на інтервалі $x \in [2; +\infty)$?

А	Б	В	Г	Д
1)	2)	3)	4)	жодна з перелічених

10. Яка з наведених точок належить графіку функції $y = \frac{5+x}{x-2}$? (Пробне ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
(2; 7)	(1; 6)	(-3; 0,4)	(0; 2,5)	(4; 4,5)

11. Яка з наведених функцій є парною? (Пробне ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
$y = x^4 - 2x$	$y = x^4 - x^2 + 11$	$y = x^3 - x$	$y = x^4 - 2x^3 + 1$	$y = x^3 - 2x^2 + 1$

12. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = x^2 - 4$; 2) $y = x^2 - 3x + 5$; 3) $y = \frac{x^2}{x-5}$; 4) $y = \frac{x-3}{x^2-4}$;
 5) $y = \frac{4}{x^2-5x+4}$; 6) $y = \frac{4+x}{2x^2-7x-3}$; 7) $y = \sqrt{x+1}$; 8) $y = \sqrt{x-20}$;
 9) $y = \sqrt{x^3-27}$; 10) $y = \sqrt{x^2+5x-6}$.

13. Знайдіть множину значень функції:

- 1) $y = x + 7$; 2) $y = x - 9$; 3) $y = -x^2 + 4x - 5$; 4) $y = 3x^2 - 8x - 3$;
 5) $y = \frac{4+x}{8-x}$; 6) $y = \frac{x^2-4}{x+7}$; 7) $y = \sqrt{x+9}$; 8) $y = \sqrt{x^2-144}$.

14. Дослідіть функцію на парність/непарність та знакосталість:

- 1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = (x-4)^2$; 3) $y = (x-3)^2 + 1$; 4) $y = -3x^2 + 7x + 6$;
 5) $y = \frac{4}{x}$; 6) $y = \frac{3}{x} - 1$; 7) $y = x^3$; 8) $y = 1 - x^3$.

15. Побудуйте графік функції та опишіть властивості функції:

- 1) $y = 3x - 5$; 2) $y = 7 - 4x$; 3) $y = \frac{4}{x-5} + 2$; 4) $y = \frac{2}{x+4} - 3$;
 5) $y = x^2 + 5$; 6) $y = (x-8)^2 + 1$; 7) $y = x^3 - 3$; 8) $y = (x-1)^3 + 6$;
 9) $y = \sqrt{x+7}$; 10) $y = \sqrt{x-1} + 5$.

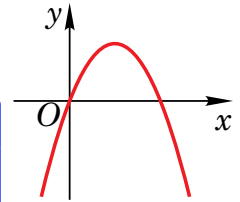
Рівень В

1. Знайдіть множину значень функції $y = \sqrt{x^2+9} - 6$. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3]$	$(-\infty; -3]$	$[-3; +\infty)$	$[-6; +\infty)$	усі дійсні числа

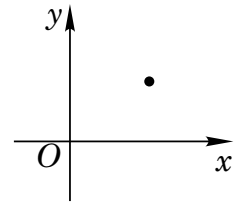
2. На рисунку побудовано графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки чисел a , b , c . (ЗНО, 2010 р.).

А	Б	В	Г	Д
$a < 0$, $b > 0$, $c < 0$	$a < 0$, $b < 0$, $c = 0$	$a > 0$, $b < 0$, $c = 0$	$a < 0$, $b > 0$, $c = 0$	$a < 0$, $b > 0$, $c > 0$



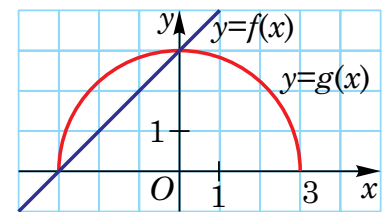
3. У прямокутній системі координат зображено точку, що є вершиною параболи $y = x^2 + bx + c$ (див. рисунок). Укажіть правильне твердження щодо коефіцієнтів b і c . (ЗНО, 2010 р.).

А	Б	В	Г	Д
$b < 0, c > 0$	$b > 0, c < 0$	$b > 0, c = 0$	$b < 0, c < 0$	$b > 0, c > 0$



4. На рисунку зображено графіки функцій $f(x) = x + 3$ та $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Розв'яжіть нерівність $f(x) \geq g(x)$. (Пробне ЗНО, 2011 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\{-3\} \cup [0; 3]$	$(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$	$[-3; 0]$	$\{-3\} \cup [0; +\infty)$	$[0; 3]$



5. Парна функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел. Які з наведених тверджень є правильними? (Пробне ЗНО, 2016 р.).

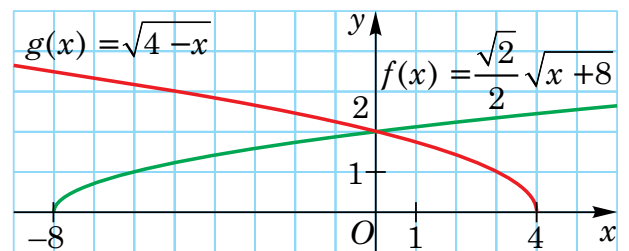
I. $f(-10) = -f(10)$.

II. $f(-6) = f(6)$.

III. Графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно осі y .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і III	лише II і III	лише III

6. На рисунку зображено графіки функцій $g(x) = \sqrt{4 - x}$ і $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x + 8}$. Укажіть проміжок, на якому виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$. (ЗНО, 2008 р.).



А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$[-8; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; 4]$	$[-8; 0]$

7. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $y = -x^2 + 4x + 1$; 2) $y = x^3 - 3x$; 3) $y = \frac{1}{x} + 3$; 4) $y = |x - 2|$;
 5) $y = \sqrt{x - 1} + 2$; 6) $y = 2^x - 3$; 7) $y = \sin x$; 8) $y = \cos x$.

8. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = (x - 2)^2 - 4$; 2) $y = (x + 3)^2 - 4$; 3) $y = |x + 4|$;
 4) $y = |x - 3| + 7$; 5) $y = \sqrt{x - 3} + 4$; 6) $y = \frac{2}{4 - x} + 3$.

9. Установіть відповідність між функцією (1–4) та областю її визначення (А–Д).

Функція

1 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+2}{x-1}$

2 $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$

3 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$

4 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$

Область визначення функції

А $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Б $(-2; 1)$

В $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

Г $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$

Д $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

10. Установіть відповідність між функцією (1–4) та інтервалом зростання функції (А–Д).

Функція

1 $f(x) = x^2 - 3$

2 $f(x) = (x-3)^2$

3 $f(x) = -x^2 + 3$

4 $f(x) = -(x+3)^2$

Інтервал зростання функції

А $(-\infty; 0]$

Б $[0; +\infty)$

В $(-\infty; -3]$

Г $[-3; +\infty)$

Д $[3; +\infty)$

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

11. Установіть відповідність між функцією (1–4) та нулями функції (А–Д).

Функція

1 $y = \sqrt{x+2} - x$

2 $y = x^3 - 3x^2 + x - 3$

3 $y = |x-2| - 1$

4 $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x+3}$

Нулі функції

А 5

Б 2

В 3

Г 1; 3

Д -1; 2

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

12. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{\sqrt{5-x^2-4x}}{3-x};$

2) $y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}.$

Рівень С

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \log_{x+4} (9 - 8x - x^2);$

2) $y = \sqrt{\frac{(x+4)(3-x)}{\lg(x^2+1)}};$

3) $y = \sqrt{\log_{x-2} (x^2 - 8x + 15)};$

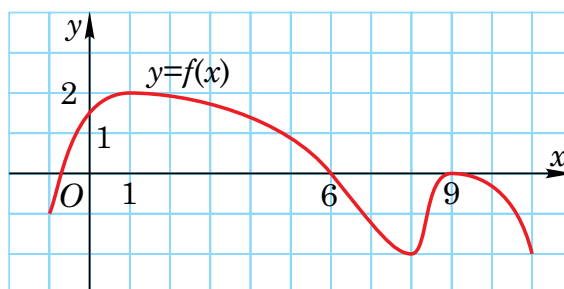
4) $y = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}.$

2. Знайдіть область значень функції $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$.

3. Обчисліть нулі функції $y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$.

4. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 2|x| - 1$. Укажіть кількість коренів рівняння $-x^2 + 2|x| - 1 = -1$.

5. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень функції. (ЗНО, 2016 р.).
6. Побудуйте графік функції $y = \frac{\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 2|}{2}$. (ЗНО, 2007 р.).
7. Знайдіть усі значення параметра a , для яких рівняння $|4 - |1 - |x|| = a$ має найбільшу кількість коренів.
8. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$. Укажіть множину значень функції та розв'язки нерівності $f(x) > 0$. (ЗНО, 2008 р.).
9. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, що визначена на множині дійсних чисел і має лише три нулі. Розв'яжіть систему $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ x^2 + x - 6 > 0. \end{cases}$ У відповідь запишіть суму всіх цілих розв'язків системи. (ЗНО, 2011 р.).
10. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3 - x^2}{2|x - 1|}$.
Укажіть область визначення функції, нулі функції, інтервали монотонності функції. (ЗНО, 2006 р.).



ХІІ. Рефлексія (2 хв)

Запропонуйте учням/ученицям оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?