

Повторення. Функції та їхні властивості

Урок 2. Лінійна функція. Розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей. Лінійні рівняння з двома змінними

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви повторите:

- 1) означення лінійної функції;
- 2) побудову графіка лінійної функції;
- 3) розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною;
- 4) знаходження нулів лінійної функції;
- 5) розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною;
- 6) знаходження інтервалів знакосталості лінійної функції;
- 7) розташування графіка лінійного рівняння з двома змінними на координатній площині залежно від його коефіцієнтів.

II. Повторення

1. Визначте числа k і b у функції $y = -3x + 5$.
2. Знайдіть нуль функції $y = 4x - 8$.
3. Розв'яжіть рівняння $5x - 7 = 13$.
4. Розв'яжіть нерівність $3x + 5 \geq 11$.

III. Лінійна функція. Графік лінійної функції

Означення. Лінійна функція — це функція, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа.

Якщо $k > 0$, то лінійна функція $y = kx + b$ зростаюча.

Якщо $k < 0$, то лінійна функція $y = kx + b$ спадає.

Графіком лінійної функції $y = kx + b$ є пряма.

Щоб побудувати графік лінійної функції, нам достатньо мати координати двох точок, що належать графіку функції.

Приклад 1. Функцію задано формулою $y = -2x + 5$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: $-4, 0$;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: $9, -5$.

Розв'язання. 1) $f(-4) = -2 \cdot (-4) + 5 = 13$, $f(0) = -2 \cdot 0 + 5 = 5$.

2) Якщо $y = 9$, то $-2x + 5 = 9$, $-2x = 4$, $x = -2$.

Якщо $y = -5$, то $-2x + 5 = -5$, $-2x = -10$, $x = 5$.

Відповідь. 1) 13; 5. 2) $-2; 5$.

IV. Розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною

Означення. Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають **лінійним рівнянням з однією змінною**.

Розв'яжемо рівняння $ax = b$ для різних значень a і b .

1) Якщо $a \neq 0$, то отримаємо $x = \frac{b}{a}$.

Отже, якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь $x = \frac{b}{a}$.

2) Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$.

Тоді можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то $0x = 0$, $0 = 0$ — правильна рівність.

Рівняння має безліч коренів. Тобто, будь-яке число є коренем рівняння.

Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то $0x = b$, $0 = b$ — неправильна рівність. Тобто, рівняння не має коренів.

V. Нулі лінійної функції

Означення. Нулі лінійної функції — значення аргументу x , при яких значення функції дорівнює нулю.

Для лінійної функції виду $y = ax + b$, якщо $a \neq 0$, то нулем функції є число $-\frac{b}{a}$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $(3x + 2,1)(8 - 2x) = 0$.

Розв'язання. Оскільки добуток кількох множників дорівнює нулю тоді, коли принаймні один із множників дорівнює нулю, то:

$$\begin{aligned} 3x + 2,1 &= 0 && \text{або} \\ 3x &= -2,1, \\ x &= -0,7; \\ \text{Відповідь. } &-0,7; 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 - 2x &= 0, \\ -2x &= -8, \\ x &= 4. \end{aligned}$$

VI. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною

Розглянемо нерівність $ax > b$.

Якщо $a > 0$, то $ax > b$, $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Якщо $a < 0$, то $ax > b$, $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.

Якщо $a = 0$, то нерівність $0x > b$ — правильна за будь-якого значення x , якщо b — від'ємне число. Якщо $b \geq 0$, то нерівність не має розв'язків.

Примітка. Для інших знаків порівняння, нерівність розв'язуємо аналогічно. Лише для знаків $\geq$, $\leq$ значення $x = \frac{b}{a}$ належить множинам розв'язків.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $4(x - 2) - 3(x + 1) \leq 2x - 2$.

Розв'язання. $4(x - 2) - 3(x + 1) \leq 2x - 2$, $4x - 8 - 3x - 3 \leq 2x - 2$,
 $x - 2x \leq 11 - 2$, $-x \leq 9$, $x \geq -9$. Отже, $x \in [-9; +\infty)$.

Відповідь. $[-9; +\infty)$.

VII. Знаходження інтервалів знакосталості лінійної функції

Для лінійної функції $y = ax + b$, $a \neq 0$, знакосталість функції змінюється лише в нулі функції $x = -\frac{b}{a}$.

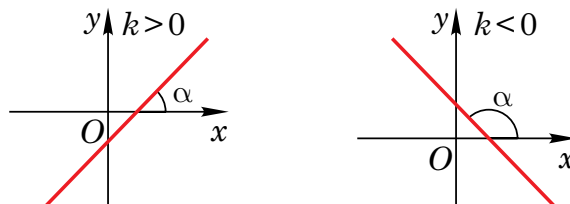
Алгоритм знаходження інтервалів знакосталості

- 1) Знайдіть нуль функції $x_0 = -\frac{b}{a}$.
- 2) На осі Ox розгляньте інтервали: $x < x_0$ та $x > x_0$.
- 3) Визначте знак функції на кожному з інтервалів.
 - Якщо $a > 0$, то функція зростає. При $x < x_0$ — значення функції від'ємні, при $x > x_0$ — значення функції додатні.
 - Якщо $a < 0$, то функція спадає. При $x < x_0$ — значення функції додатні, при $x > x_0$ — значення функції від'ємні.

VIII. Лінійні рівняння з двома змінними. Розташування графіка лінійного рівняння з двома змінними на координатній площині залежно від його коефіцієнтів

Означення. *Лінійним рівнянням із двома змінними* називають рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.

У загальному випадку лінійне рівняння з двома змінними має безліч пар розв'язків. Пари розв'язків рівняння визначають координати точок, що належать прямій лінії, яка є графіком лінійного рівняння з двома невідомими.



Розглянемо розташування прямої лінії на координатній площині залежно від значень параметрів (чисел) a, b і c .

1) Якщо $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, то пряма лінія перетинатиме координатні осі (x — вісь абсцис та y — вісь ординат) під гострим або тупим кутом із додатним напрямком осі Ox .

Із рівняння $ax + by = c$ матимемо: $by = -ax + c, y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Число $-\frac{a}{b}$ позначають $k = -\frac{a}{b}$ і називають **кутовим коефіцієнтом**.

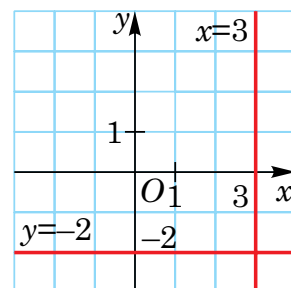
Якщо $k > 0$, то кут між прямою та додатним напрямком осі Ox — гострий. Якщо $k < 0$, то кут між прямою та додатним напрямком осі Ox — тупий.

2) Якщо $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$, то пряма лінія перетинатиме координатні осі у точці $(0; 0)$ під гострим або тупим кутом із додатним напрямком осі Ox (аналогічно попередньому пункту).

3) Якщо $a = 0$, то $y = \frac{c}{b}$ — пряма лінія, яка паралельна осі Ox і проходить через точку $y = \frac{c}{b}$.

4) Якщо $b = 0$, то $x = \frac{c}{a}$ — пряма лінія, яка паралельна осі Oy і проходить через точку $x = \frac{c}{a}$.

Наприклад. Побудуємо графіки рівнянь: $y = -2$ і $x = 3$ (див. рисунок).



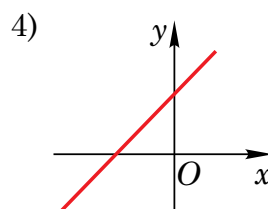
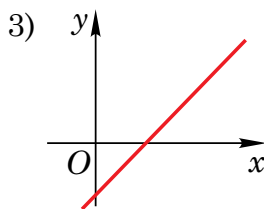
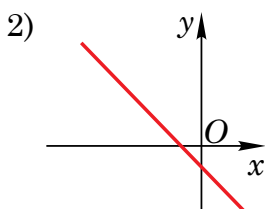
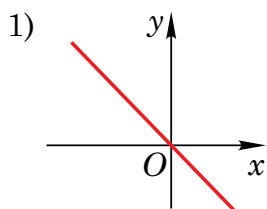
VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Укажіть лінійну функцію, графік якої паралельний осі абсцис і проходить через точку $A(-2; 3)$. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
$y = 3$	$y = -2$	$x = -2$	$x = 3$	$y = -\frac{2}{3}x$

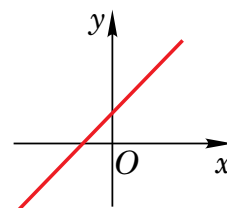
2. На якому із рисунків 1) – 4) для лінійних функцій виконується умова $k < 0, b < 0$?



А	Б	В	Г	Д
1)	2)	3)	4)	такого рисунка не має

3. За видом графіка функції $y = kx + b$ визначте знаки коефіцієнтів k і b (див. рисунок). (ЗНО, 2007 р.).

А	Б	В	Г	Д
$k > 0, b < 0$	$k < 0, b > 0$	$k < 0, b < 0$	$k > 0, b > 0$	$k = 0, b > 0$



4. Установіть відповідність між початком речення (1–4) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (Пробне ЗНО, 2016 р.).

Початок речення

1 Графік функції

$$y = 5 - x$$

2 Графік функції

$$y = 2x + 3$$

3 Графік рівняння

$$2x + 6 = 0$$

4 Графік функції

$$y = x - 4$$

Закінчення речення

А не перетинає вісь y .

Б не має спільних точок із графіком функції $y = x^2 - 5$.

В утворює з додатним напрямом осі x тупий кут.

Г паралельний прямій $y - x = 0$.

Д перетинає коло, задане рівнянням $x^2 + y^2 = 4$.

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

5. Знайдіть корінь рівняння:

- 1) $6x - 12 = 4x - 8$; 2) $5y - 8 = 2y - 5$; 3) $0,3x + 8 = 2$; 4) $0,4x - 6 = -12$;
 5) $4 - x = 1 + 4x$; 6) $x + 6 = 5 + 4x$; 7) $0,9x + 1 = 0,2x - 6$; 8) $1,3x - 2 = 2,6x + 11$.

6. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та кількістю його коренів (А–Д).

Рівняння

1 $5x - 0,3 = 5x - \frac{1}{3}$

2 $5x - 2 = 5x + 2$

3 $|5x - 2| = 2$

4 $5x - 2 = 2$

Кількість коренів рівняння

А жодного

Б один

В два

Г три

Д безліч

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його коренем (А–Д).

Рівняння

1 $7x + 2 = 5x + 6$

2 $7x - 2 = 6 - 5x$

3 $7x - 2 = -6 - 5x$

4 $7x + 6 = -6 - 5x$

Корінь рівняння

А $-\frac{1}{3}$

Б -1

В 0

Г $\frac{2}{3}$

Д 2

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $3x > 18$;

2) $5x < 20$;

3) $-7x \leq 42$;

4) $9 - 3x \geq 36$;

5) $8x < 9x + 5$;

6) $10x - 7 > 33$;

7) $6x + 4 \geq 8x - 14$;

8) $3x - 6 \leq 12 - 6x$;

9) $4(3 - x) - 3 \geq 6x - 7$;

10) $12 - 2(2x + 5) < 4(5 - x) + 6$.

9. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

1 $\frac{x-1}{3} < 1$

2 $\frac{x+1}{3} < 1$

3 $\frac{-x+1}{3} < 1$

4 $\frac{-x-1}{3} < 1$

Множина розв'язків нерівності

А $(-\infty; -4)$

Б $(-\infty; 2)$

В $(-\infty; 4)$

Г $(-4; +\infty)$

Д $(-2; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

Рівень В

1. Знайдіть корінь рівняння:

1) $(2x - 5) - (3x - 7) = 4$;

2) $(2 + 3x) - (4x - 7) = 10$;

3) $(5x - 1,2) - 3x = 2$;

4) $2(x - 1,5) + x = 6$;

5) $7 - 2(x + 3) = 9 - 6x$;

6) $13 - 3(x + 1) = 4 - 5x$;

7) $4(x - 0,5) - 2(x + 0,3) = -2,6$;

8) $0,2(3x - 5) - 0,3(x - 1) = -0,7$;

9) $\frac{1}{2}(x - 6) - 3 = \frac{1}{3}x$;

10) $\frac{2}{3}(x + 9) - 2 = \frac{1}{6}x$;

11) $4 = -1 - (11x - 5)$;

12) $-6 = -2 - (4 + 9x)$.

- 2.** Побудуйте графік функції й опишіть властивості функції:
- 1) $y = 2x + 3$; 2) $y = -x + 4$; 3) $y = 3x$;
 4) $y = 5x - 7$; 5) $y = \frac{1}{2}x - 2$; 6) $y = -2x + 4$.
- 3.** Розв'яжіть нерівність:
- 1) $7 - 2(3x - 1) < 5x + 9$; 2) $4(x - 2) + 7 \geq 3(2x + 1) - 5$;
 3) $\frac{5 - 2x}{4} \leq \frac{3x + 1}{2}$; 4) $9 - (x + 2) > 2(4 - x)$;
 5) $\frac{2x + 7}{3} - \frac{x - 1}{2} \geq 4$; 6) $2(3x - 5) - (x + 7) \leq 4x + 1$;
 7) $\frac{4x - 9}{6} + \frac{2x + 3}{4} > 3$; 8) $5 - 3(x - 2) \geq 2(2x + 1) - 7$.
- 4.** Знайдіть нуль функції та проміжки знакосталості функції:
- 1) $f(x) = -3x + 7$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$; 3) $f(x) = -\frac{5}{3}x + 10$;
 4) $f(x) = 7x - 28$; 5) $f(x) = -0,25x - 5$; 6) $f(x) = 12 - 4x$.
- 5.** Виразіть y через x :
- 1) $2x - 3y = 1$; 2) $-x + 4y = 2$; 3) $0,2x + 0,4y = 4$; 4) $0,5y - 0,25x = 1$.
- 6.** Розв'яжіть рівняння $|5 - 4x| = 3$. Якщо рівняння має єдиний корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їхню суму.
- 7.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x - 2}{5} + \frac{2x - 5}{4} + \frac{4x - 1}{20} = 4 - x$.

Рівень С

- 1.** Батько старший за сина в 9 разів, а сума їхніх років дорівнює 30. Через скільки років батько стане старшим за сина удвічі?
- 2.** У двоцифровому числі цифра десятків утричі більша за цифру одиниць. Якщо від цього числа відняти число, записане цими ж цифрами, але у зворотному порядку, то отримаємо 36. Знайдіть це число.
- 3.** У першому зерносховищі було 548 ц зерна, а в другому — 2060 ц. Із першого зерносховища щодня брали по 12 ц зерна, а з другого — по 15 ц. Через скільки днів у першому зерносховищі залишиться зерна в 4 рази менше, ніж у другому?
- 4.** Відстань між двома містами велосипедист долає за 2 години, а пішохід — за 6 годин. Уважайте, що швидкості велосипедиста і пішохода є сталими протягом усього шляху. (Пробне ЗНО, 2015 р.).
- 1) Визначте відстань між містами (у км), якщо швидкість велосипедиста на 12 км/год більша за швидкість пішохода.
- 2) Пішохід і велосипедист одночасно вирушили назустріч один одному з цих міст. Через скільки годин після початку руху вони зустрінуться?
- 5.** В одному басейні 25 м³ води, а в другому — 130 м³. У перший басейн щохвилини вливається 2 м³ води, а з другого басейна щохвилини виливається 4 м³ води. Через скільки хвилин у першому басейні води стане удвічі менше, ніж у другому?
- 6.** За якого значення a рівняння $(2a + 3)x - 5 = (a - 1)(x + 2) + 4$ матиме один корінь?

7. За якого значення a рівняння $\frac{3x-a}{2} + 4 = \frac{x+5}{a} - 1$ не має коренів?
8. Розв'яжіть нерівність $\frac{2-x}{4} + 1 < \frac{2x-1}{10} - \frac{2x-3}{6}$. У відповідь запишіть найменший цілий розв'язок нерівності.
9. Розв'яжіть нерівність $7 < 1 - 3x < 16$. У відповідь запишіть найбільший цілий розв'язок нерівності.
10. Розв'яжіть нерівність $x + 1 < \frac{x}{2} < x + 2$. У відповідь запишіть суму цілих розв'язків нерівності.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що я вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

