

Повторення. Функції та їхні властивості

Урок 2. Лінійна функція. Розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей. Лінійні рівняння з двома змінними

План уроку

1. Лінійна функція.
2. Графік лінійної функції.
3. Розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною.
4. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною.
5. Знаходження інтервалів знакосталості лінійної функції.
6. Лінійні рівняння з двома змінними. Розташування графіка лінійного рівняння з двома змінними на координатній площині залежно від його коефіцієнтів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній комплексній проблемній ситуації її складові частини, що можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–2];

оперує математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–1];

наводить аргументи, формулює контраргументи, керуючи при цьому власними емоціями, урахує емоційний стан інших осіб [12 МАО 2.4.2–1];

висловлює ідеї, пов'язані з розумінням комплексної проблемної ситуації [12 МАО 2.4.2–2];

самостійно й у співпраці з іншими оцінює різні моделі та шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу на ілюстративних прикладах.

- 2) При поясненні матеріалу наводьте лаконічні означення та приклади. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 3) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 5) Обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Акцентуйте увагу учнів/учениць на розв'язанні тестових завдань ЗНО/НМТ.
- 7) Виділіть час на розв'язування тренувальних вправ, які спрямовані на формування практичних навиків та навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

I. (Усно). Повторення (2–3 хв)

1. Визначте числа k і b у функції $y = -3x + 5$.
Відповідь. $k = -3$, $b = 5$.
2. Знайдіть нуль функції $y = 4x - 8$.
Відповідь. 2.
3. Розв'яжіть рівняння $5x - 7 = 13$.
Відповідь. $x = 4$.
4. Розв'яжіть нерівність $3x + 5 \geq 11$.
Відповідь. $(2; +\infty)$.

II. Лінійна функція. Графік лінійної функції

Означення. Лінійна функція — це функція, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа.

Якщо $k > 0$, то лінійна функція $y = kx + b$ зростаюча.

Якщо $k < 0$, то лінійна функція $y = kx + b$ спадає.

Графіком лінійної функції $y = kx + b$ є пряма.

Щоб побудувати графік лінійної функції, нам достатньо мати координати двох точок, що належать графіку функції.

Ілюстративні приклади (3–4 хв)

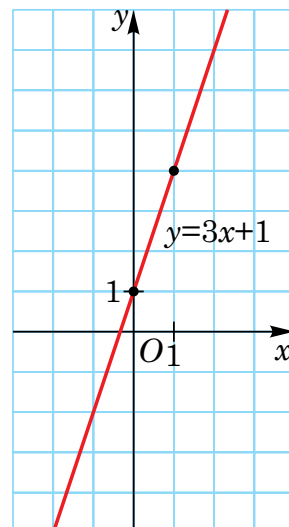
5. Функцію задано формулою $y = -2x + 5$. Знайдіть:
 - 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -4 , 0 ;
 - 2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 9 , -5 .*Розв'язання.* 1) $f(-4) = -2 \cdot (-4) + 5 = 13$, $f(0) = -2 \cdot 0 + 5 = 5$.
2) Якщо $y = 9$, то $-2x + 5 = 9$, $-2x = 4$, $x = -2$.
Якщо $y = -5$, то $-2x + 5 = -5$, $-2x = -10$, $x = 5$.
Відповідь. 1) 13; 5. 2) -2 ; 5.

6. Побудуйте графік функції $y = 3x + 1$.

Розв'язання. Знайдемо дві точки для побудови графіка функції:

x	0	1
y	1	4

Графік побудовано на рисунку.



III. Розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною

Означення. Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають **лінійним рівнянням з однією змінною**.

Розв'яжемо рівняння $ax = b$ для різних значень a і b .

1) Якщо $a \neq 0$, то отримаємо $x = \frac{b}{a}$.

Отже, якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь $x = \frac{b}{a}$.

2) Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$.

Тоді можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то $0x = 0$, $0 = 0$ — правильна рівність.

Рівняння має безліч коренів. Тобто, будь-яке число є коренем рівняння.

Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то $0x = b$, $0 = b$ — неправильна рівність. Тобто, рівняння не має коренів.

IV. Нулі лінійної функції

Означення. **Нулі лінійної функції** — значення аргументу x , при яких значення функції дорівнює нулю.

Для лінійної функції виду $y = ax + b$, якщо $a \neq 0$, то нулем функції є число $-\frac{b}{a}$.

Ілюстративні приклади (4–5 хв)

7. Розв'яжіть рівняння $(3x + 2,1)(8 - 2x) = 0$.

Розв'язання. Оскільки добуток кількох множників дорівнює нулю тоді, коли принаймні один із множників дорівнює нулю, то:

$$3x + 2,1 = 0 \quad \text{або} \quad 8 - 2x = 0,$$

$$3x = -2,1, \quad -2x = -8,$$

$$x = -0,7; \quad x = 4.$$

Відповідь. $-0,7$; 4 .

8. Знайдіть нулі функцій:

1) $y = 2x - 6$;

2) $y = -5x + 10$.

Розв'язання. 1) $2x - 6 = 0$, $2x = 6$, $x = 3$.

2) $-5x + 10 = 0$, $-5x = -10$, $x = 2$.

Відповідь. 1) 3; 2) 2.

V. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною

Розглянемо нерівність $ax > b$.

Якщо $a > 0$, то $ax > b$, $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Якщо $a < 0$, то $ax > b$, $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.

Якщо $a = 0$, то нерівність $0x > b$ — правильна за будь-якого значення x , якщо b — від'ємне число. Якщо $b \geq 0$, то нерівність не має розв'язків.

Примітка. Для інших знаків порівняння, нерівність розв'язуємо аналогічно.

Лише для знаків $\geq$, $\leq$ значення $x = \frac{b}{a}$ належить множинам розв'язків.

Ілюстративні приклади (4–5 хв)

9. Розв'яжіть нерівність $4(x - 2) - 3(x + 1) \leq 2x - 2$.

Розв'язання. $4(x - 2) - 3(x + 1) \leq 2x - 2$, $4x - 8 - 3x - 3 \leq 2x - 2$,

$x - 2x \leq 11 - 2$, $-x \leq 9$, $x \geq -9$. Отже, $x \in [-9; +\infty)$.

Відповідь. $[-9; +\infty)$.

VI. Знаходження інтервалів знакосталості лінійної функції

Для лінійної функції $y = ax + b$, $a \neq 0$, знакосталість функції змінюється лише в нулі функції $x = -\frac{b}{a}$.

Алгоритм знаходження інтервалів знакосталості

1) Знайдіть нуль функції $x_0 = -\frac{b}{a}$.

2) На осі Ox розгляньте інтервали: $x < x_0$ та $x > x_0$.

3) Визначте знак функції на кожному з інтервалів.

- Якщо $a > 0$, то функція зростає. При $x < x_0$ — значення функції від'ємні, при $x > x_0$ — значення функції додатні.
- Якщо $a < 0$, то функція спадає. При $x < x_0$ — значення функції додатні, при $x > x_0$ — значення функції від'ємні.

Ілюстративний приклад (2–3 хв)

10. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = 3x - 6$;

2) $y = -2x + 4$.

Розв'язання. 1) Нуль функції: $3x - 6 = 0$, $x = 2$.

Оскільки $a = 3 > 0$, то функція зростає.

Якщо $x < 2$, то функція набуває від'ємних значень.

Якщо $x > 2$, то функція набуває додатних значень.

2) Нуль функції: $-2x + 4 = 0$, $x = 2$.

Оскільки $a = -2 < 0$, то функція спадає.

Якщо $x < 2$, то функція набуває додатних значень.

Якщо $x > 2$, то функція набуває від'ємних значень.

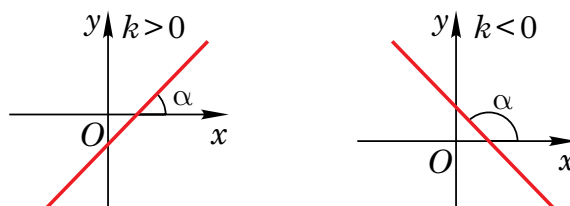
Відповідь. 1) $x \in (-\infty; 2)$, то $y < 0$; $x \in (2; +\infty)$, то $y > 0$.

2) $x \in (-\infty; 2)$, то $y > 0$; $x \in (2; +\infty)$, то $y < 0$.

VII. Лінійні рівняння з двома змінними. Розташування графіка лінійного рівняння з двома змінними на координатній площині залежно від його коефіцієнтів

Означення. *Лінійним рівнянням із двома змінними* називають рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні, a , b , c — деякі числа.

У загальному випадку лінійне рівняння з двома змінними має безліч пар розв'язків. Пари розв'язків рівняння визначають координати точок, що належать прямій лінії, яка є графіком лінійного рівняння з двома невідомими.



Розглянемо розташування прямої лінії на координатній площині залежно від значень параметрів (чисел) a , b і c .

1) Якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, то пряма лінія перетинатиме координатні осі (x — вісь абсцис та y — вісь ординат) під гострим або тупим кутом із додатним напрямком осі Ox .

Із рівняння $ax + by = c$ матимемо: $by = -ax + c$, $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

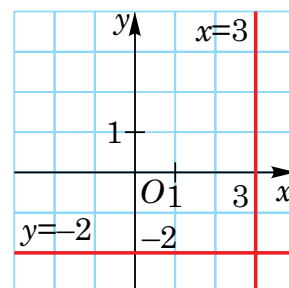
Число $-\frac{a}{b}$ позначають $k = -\frac{a}{b}$ і називають **кутовим коефіцієнтом**.

Якщо $k > 0$, то кут між прямою та додатним напрямком осі Ox — гострий. Якщо $k < 0$, то кут між прямою та додатним напрямком осі Ox — тупий.

2) Якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$, то пряма лінія перетинатиме координатні осі у точці $(0; 0)$ під гострим або тупим кутом із додатним напрямком осі Ox (аналогічно попередньому пункту).

3) Якщо $a = 0$, то $y = \frac{c}{b}$ – пряма лінія, яка паралельна осі Ox і проходить через точку $y = \frac{c}{b}$.

4) Якщо $b = 0$, то $x = \frac{c}{a}$ – пряма лінія, яка паралельна осі Oy і проходить через точку $x = \frac{c}{a}$.



Наприклад. Побудуємо графіки рівнянь: $y = -2$ і $x = 3$ (див. рисунок).

Ілюстративний приклад (2–3 хв)

11. У рівнянні $3x - 2y = 6$ виразіть x через y та знайдіть будь-які два розв'язки рівняння.
Розв'язання.

1) $3x = 2y + 6$, $x = \frac{2y + 6}{3}$, $x = \frac{2}{3}y + 2$.

2) Якщо $y = 6$, то $x = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = 6$.

Якщо $y = -2$, то $x = \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 = \frac{2}{3}$.

Відповідь. 1) $x = \frac{2}{3}y + 2$. 2) $(6; 6)$, $(\frac{2}{3}; -2)$.

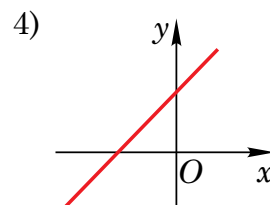
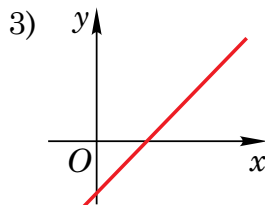
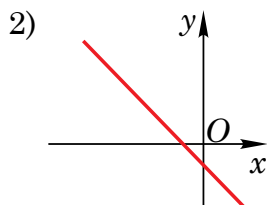
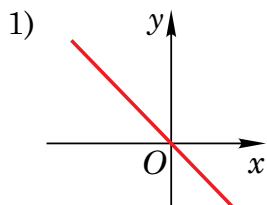
VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Укажіть лінійну функцію, графік якої паралельний осі абсцис і проходить через точку $A(-2; 3)$. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
$y = 3$	$y = -2$	$x = -2$	$x = 3$	$y = -\frac{2}{3}x$

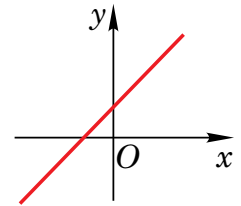
2. На якому із рисунків 1) – 4) для лінійних функцій виконується умова $k < 0$, $b < 0$?



А	Б	В	Г	Д
1)	2)	3)	4)	такого рисунка не має

3. За видом графіка функції $y = kx + b$ визначте знаки коефіцієнтів k і b (див. рисунок). (ЗНО, 2007 р.).

А	Б	В	Г	Д
$k > 0, b < 0$	$k < 0, b > 0$	$k < 0, b < 0$	$k > 0, b > 0$	$k = 0, b > 0$



4. Установіть відповідність між початком речення (1–4) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (Пробне ЗНО, 2016 р.).

Початок речення

1 Графік функції

$$y = 5 - x$$

2 Графік функції

$$y = 2x + 3$$

3 Графік рівняння

$$2x + 6 = 0$$

4 Графік функції

$$y = x - 4$$

Закінчення речення

А не перетинає вісь y .

Б не має спільних точок із графіком функції $y = x^2 - 5$.

В утворює з додатним напрямом осі x тупий кут.

Г паралельний прямій $y - x = 0$.

Д перетинає коло, задане рівнянням $x^2 + y^2 = 4$.

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

5. Знайдіть корінь рівняння:

- 1) $6x - 12 = 4x - 8$; 2) $5y - 8 = 2y - 5$; 3) $0,3x + 8 = 2$; 4) $0,4x - 6 = -12$;
5) $4 - x = 1 + 4x$; 6) $x + 6 = 5 + 4x$; 7) $0,9x + 1 = 0,2x - 6$; 8) $1,3x - 2 = 2,6x + 11$.

6. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та кількістю його коренів (А–Д).

Рівняння

1 $5x - 0, (3) = 5x - \frac{1}{3}$

2 $5x - 2 = 5x + 2$

3 $|5x - 2| = 2$

4 $5x - 2 = 2$

Кількість коренів рівняння

А жодного

Б один

В два

Г три

Д безліч

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його коренем (А–Д).

Рівняння

1 $7x + 2 = 5x + 6$

2 $7x - 2 = 6 - 5x$

3 $7x - 2 = -6 - 5x$

4 $7x + 6 = -6 - 5x$

Корінь рівняння

А $-\frac{1}{3}$

Б -1

В 0

Г $\frac{2}{3}$

Д 2

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

8. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $3x > 18$; 2) $5x < 20$; 3) $-7x \leq 42$; 4) $9 - 3x \geq 36$;
5) $8x < 9x + 5$; 6) $10x - 7 > 33$; 7) $6x + 4 \geq 8x - 14$; 8) $3x - 6 \leq 12 - 6x$;
9) $4(3 - x) - 3 \geq 6x - 7$; 10) $12 - 2(2x + 5) < 4(5 - x) + 6$.

9. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв’язків (А–Д).

Нерівність

1 $\frac{x-1}{3} < 1$

2 $\frac{x+1}{3} < 1$

3 $\frac{-x+1}{3} < 1$

4 $\frac{-x-1}{3} < 1$

Множина розв’язків нерівності

А $(-\infty; -4)$

Б $(-\infty; 2)$

В $(-\infty; 4)$

Г $(-4; +\infty)$

Д $(-2; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

Рівень В

1. Знайдіть корінь рівняння:

1) $(2x-5)-(3x-7)=4$;

2) $(2+3x)-(4x-7)=10$;

3) $(5x-1,2)-3x=2$;

4) $2(x-1,5)+x=6$;

5) $7-2(x+3)=9-6x$;

6) $13-3(x+1)=4-5x$;

7) $4(x-0,5)-2(x+0,3)=-2,6$;

8) $0,2(3x-5)-0,3(x-1)=-0,7$;

9) $\frac{1}{2}(x-6)-3=\frac{1}{3}x$;

10) $\frac{2}{3}(x+9)-2=\frac{1}{6}x$;

11) $4=-1-(11x-5)$;

12) $-6=-2-(4+9x)$.

2. Побудуйте графік функції й опишіть властивості функції:

1) $y=2x+3$;

2) $y=-x+4$;

3) $y=3x$;

4) $y=5x-7$;

5) $y=\frac{1}{2}x-2$;

6) $y=-2x+4$.

3. Розв’яжіть нерівність:

1) $7-2(3x-1)<5x+9$;

2) $4(x-2)+7\geq 3(2x+1)-5$;

3) $\frac{5-2x}{4}\leq\frac{3x+1}{2}$;

4) $9-(x+2)>2(4-x)$;

5) $\frac{2x+7}{3}-\frac{x-1}{2}\geq 4$;

6) $2(3x-5)-(x+7)\leq 4x+1$;

7) $\frac{4x-9}{6}+\frac{2x+3}{4}>3$;

8) $5-3(x-2)\geq 2(2x+1)-7$.

4. Знайдіть нуль функції та проміжки знакосталості функції:

1) $f(x)=-3x+7$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}x-4$;

3) $f(x)=-\frac{5}{3}x+10$;

4) $f(x)=7x-28$;

5) $f(x)=-0,25x-5$;

6) $f(x)=12-4x$.

5. Виразіть y через x :

1) $2x-3y=1$;

2) $-x+4y=2$;

3) $0,2x+0,4y=4$;

4) $0,5y-0,25x=1$.

6. Розв’яжіть рівняння $|5-4x|=3$. Якщо рівняння має єдиний корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їхню суму.

7. Розв’яжіть рівняння $\frac{x-2}{5}+\frac{2x-5}{4}+\frac{4x-1}{20}=4-x$.

Рівень С

1. Батько старший за сина в 9 разів, а сума їхніх років дорівнює 30. Через скільки років батько стане старшим за сина удвічі?
2. У двоцифровому числі цифра десятків утричі більша за цифру одиниць. Якщо від цього числа відняти число, записане цими ж цифрами, але у зворотному порядку, то отримаємо 36. Знайдіть це число.
3. У першому зерносховищі було 548 ц зерна, а в другому — 2060 ц. Із першого зерносховища щодня брали по 12 ц зерна, а з другого — по 15 ц. Через скільки днів у першому зерносховищі залишиться зерна в 4 рази менше, ніж у другому?
4. Відстань між двома містами велосипедист долає за 2 години, а пішохід — за 6 годин. Уважайте, що швидкості велосипедиста і пішохода є сталими протягом усього шляху. (Пробне ЗНО, 2015 р.).
 - 1) Визначте відстань між містами (у км), якщо швидкість велосипедиста на 12 км/год більша за швидкість пішохода.
 - 2) Пішохід і велосипедист одночасно вирушили назустріч один одному з цих міст. Через скільки годин після початку руху вони зустрінуться?
5. В одному басейні 25 м^3 води, а в другому — 130 м^3 . У перший басейн щохвилини вливається 2 м^3 води, а з другого басейна щохвилини виливається 4 м^3 води. Через скільки хвилин у першому басейні води стане удвічі менше, ніж у другому?
6. За якого значення a рівняння $(2a + 3)x - 5 = (a - 1)(x + 2) + 4$ матиме один корінь?
7. За якого значення a рівняння $\frac{3x - a}{2} + 4 = \frac{x + 5}{a} - 1$ не має коренів?
8. Розв'яжіть нерівність $\frac{2 - x}{4} + 1 < \frac{2x - 1}{10} - \frac{2x - 3}{6}$. У відповідь запишіть найменший цілий розв'язок нерівності.
9. Розв'яжіть нерівність $7 < 1 - 3x < 16$. У відповідь запишіть найбільший цілий розв'язок нерівності.
10. Розв'яжіть нерівність $x + 1 < \frac{x}{2} < x + 2$. У відповідь запишіть суму цілих розв'язків нерівності.

IX. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що я вже вмію

- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-