

Повторення. Функції та їхні властивості

Урок 3. Взаємне розташування двох прямих на площині. Системи лінійних рівнянь з двома невідомими

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви повторите:

- 1) взаємне розташування двох прямих на площині;
- 2) графічний метод розв'язування систем лінійних рівнянь з двома невідомими;
- 3) метод підстановки;
- 4) метод додавання;
- 5) розв'язування текстових задач за допомогою систем лінійних рівнянь.

II. Повторення

1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2y = 5x, \\ x + y = 14. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ укажіть добуток $x_0 \cdot y_0$. (ЗНО, 2019 р.)

А	Б	В	Г	Д
5	10	20	40	48

2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} xy = -12, \\ x(2y - 1) = -18. \end{cases}$ Якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи, то $x_0 = \dots$ (ЗНО, 2018 р.)

А	Б	В	Г	Д
-6	-16	-9	2	6

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = 5, \\ x - 2y = 7. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ укажіть суму $x_0 + y_0$. (ЗНО, 2013 р.)

А	Б	В	Г	Д
-18	3	4	8	12

III. Взаємне розташування двох прямих на площині

Взаємне розташування двох прямих на площині задає система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Розглянемо розташування двох прямих, заданих лінійними рівняннями з двома невідомими, на координатній площині.

1) Прямі, що є графіками рівнянь, перетинаються в одній точці. Тоді система матиме єдиний розв'язок, тобто координати точки перетину прямих: $(x_0; y_0)$.

При цьому виконується співвідношення: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

2) Прямі, що є графіками рівнянь, паралельні. Тоді система не матиме розв'язків.

При цьому виконується співвідношення: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

3) Прямі, що є графіками рівнянь, збігаються. Тоді система матиме безліч розв'язків.

При цьому виконується співвідношення: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

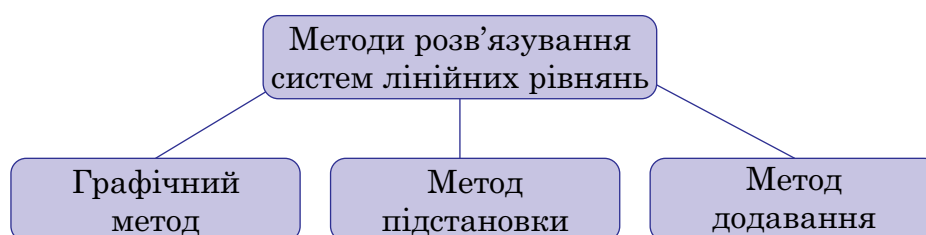
Якщо у двох лінійних рівняннях із двома невідомими виразити змінну y через x , то отримаємо дві лінійні функції $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$.

1) Якщо прямі перетинаються, то $k_1 \neq k_2$.

2) Якщо прямі — паралельні, то $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$.

3) Якщо прямі збігаються, то $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$.

IV. Системи лінійних рівнянь з двома невідомими. Графічний метод розв'язання системи лінійних рівнянь з двома невідомими



Зауваження. Графічний спосіб розв'язання системи рівнянь не завжди дає точні результати, оскільки на графіку іноді неможливо точно визначити координати

точки перетину прямих ліній. Тому доцільно використовувати аналітичні методи розв'язування систем лінійних рівнянь, а саме: методи підстановки та додавання.

Графічний метод розв'язання систем лінійних рівнянь з двома невідомими полягає в побудові в одній координатній площині графіків рівнянь, що входять до системи, та знаходженні координат точок перетину графіків, які є розв'язками системи.

Приклад 1. Розв'яжіть графічно систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x + 3y = 6; \\ 3x - y = 9. \end{cases}$$

Розв'язання. Для побудови графіка кожного лінійного рівняння складемо таблицю значень.

Для рівняння $2x + 3y = 6$ маємо:

x	3	0
y	0	2

Через отримані точки проведемо пряму l_1 (див. рисунок).

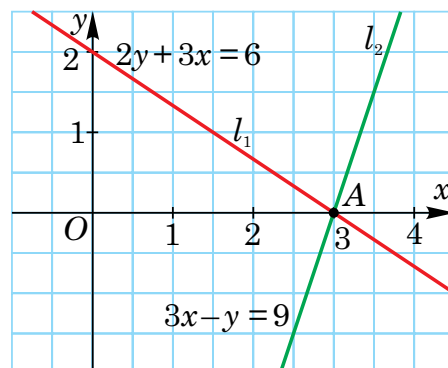
Для рівняння $3x - y = 9$ маємо:

x	3	4
y	0	3

Через отримані точки проведемо пряму l_2 (див. рисунок).

Прямі перетинаються в точці $A(3; 0)$. Координати точки перетину графіків — розв'язок системи рівнянь.

Відповідь. $(3; 0)$.



V. Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома невідомими методом (способом) підстановки

Алгоритм розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими способом підстановки

Побудуємо алгоритм на прикладі системи
$$\begin{cases} 3x + y = 12, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$$

Дія	Приклад
1) Виберіть рівняння системи, в якому виразіть одну з невідомих через іншу. Найдоцільніше виражати ту невідому, яка має коефіцієнт 1 або (-1) .	Виберемо рівняння $3x + y = 12$, у якому коефіцієнт біля y дорівнює 1. Тоді $y = 12 - 3x$. Отримаємо: $\begin{cases} y = 12 - 3x, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$
2) Підставте отриманий вираз в інше рівняння системи.	Підставляємо вираз для y у друге рівняння системи: $x - 2 \cdot (12 - 3x) = 4$.
3) Розв'яжіть отримане рівняння з однією невідомою.	$\begin{aligned} x - 24 + 6x &= 4, \\ 7x &= 28, \\ x &= 4. \end{aligned}$
4) Обчисліть значення другої невідомої.	Оскільки $x = 4$, то підставимо це значення у вираз відносно y : $y = 12 - 3 \cdot 4 = 0$.

Дія	Приклад
5) Запишіть розв'язок.	Отже, пара чисел (4; 0) є розв'язком даної системи.

VI. Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома невідомими методом (способом) додавання

Найефективніший метод розв'язання систем лінійних рівнянь — метод додавання.

Побудуємо алгоритм методу додавання на прикладі системи
$$\begin{cases} 4x - 3y = -4, \\ 4y - 10x = 3. \end{cases}$$

Дія	Приклад
1) Зрівняйте коефіцієнти при одній з невідомих, помноживши кожне з рівнянь на відповідні множники.	Помножимо перше рівняння системи на 4, а друге — на 3. $\begin{cases} 16x - 12y = -16, \\ -30x + 12y = 9; \end{cases}$
2) Додайте (або відніміть) почленно рівняння системи.	$\begin{cases} 16x - 12y = -16, \\ -14x = -7; \end{cases}$
3) Розв'яжіть рівняння з однією невідомою.	$\begin{cases} 4x - 3y = -4, \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$
4) Знайдіть значення другої невідомої, підставивши знайдене значення невідомої в будь-яке з рівнянь.	$\begin{cases} 2 - 3y = -4, \\ x = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3y = 6, \\ x = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$
5) Запишіть відповідь.	Відповідь. (0,5; 2).

VII. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

При розв'язуванні задач за допомогою систем лінійних рівнянь допомагають наступні кроки.

1. Позначте буквами невідомі величини, які потрібно знайти.
2. За умовою задачі, складіть систему лінійних рівнянь.
3. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь методом додавання або методом підстановки.
4. Проаналізуйте розв'язання системи та наведіть відповідь до задачі.

Примітка. Будь-яку задачу, до якої можна скласти систему лінійних рівнянь, можна розв'язати також за допомогою рівняння з однією невідомою. Проте, системі лінійних рівнянь до задачі скласти значно простіше.

Приклад 2. Рекламна пауза на телевізійному каналі триває 15 хвилин. За цей час показують по одному разу 10 рекламних роликів з однаковою тривалістю та трейлер фільму. Відомо, що якби цей трейлер показували на початку й наприкінці рекламної паузи, то решти часу вистачило б на показ 8 таких рекламних роликів. Скільки секунд триває показ трейлера цього фільму? Уважайте, що між показами рекламних роликів та трейлера фільму немає пауз. (Пробне ЗНО, 2020 р.).

Розв'язання. Нехай тривалість одного рекламного ролика становить x хв, а одного трейлера — y хв.

За умовою задачі, складемо й розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 10x + y = 15, \\ 8x + 2y = 15; \end{cases} \begin{cases} y = 15 - 10x, \\ 8x + 2(15 - 10x) = 15; \end{cases} \begin{cases} y = 15 - 10x, \\ 30 - 12x = 15; \end{cases} \begin{cases} y = 2,5, \\ x = 1,25. \end{cases}$$

Отже, трейлер триває $2,5$ хв = 150 с.

Відповідь. 150 с.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Дослідіть взаємне розміщення графіків лінійної функції на координатній площині:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = 2x + 3$ і $y = -x + 1$; | 2) $y = -5x + 7$ і $y = -5x - 2$; |
| 3) $y = 4x - 5$ і $y = 4x + 7$; | 4) $y = x - 4$ і $y = -x + 4$; |
| 5) $y = -3x + 2$ і $y = 6x - 1$; | 6) $y = 0,5x + 1$ і $y = 0,5x + 1$; |
| 7) $y = \frac{1}{2}x + 4$ і $y = -2x - 3$; | 8) $y = 7x - 9$ і $y = -\frac{1}{7}x + 2$. |

2. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

- | | | | |
|---|--|---|---|
| 1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} 7x - 3y = -26, \\ y - 2x = 8; \end{cases}$ | 7) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 5x + y = -18; \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 4x - y = 2. \end{cases}$ |

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} x = 6y, \\ x + 5y = 88; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 5y = 46; \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x - 4y = 4; \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} 5y - x = 8, \\ 5x - 4y = 23; \end{cases}$ | 7) $\begin{cases} 15 - x = 2y, \\ 4x - 3y = 27; \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} 5x - y = 6,2, \\ 0,8x + 3y = 13; \end{cases}$ |
| 9) $\begin{cases} 4x + y = 12, \\ 7x + 2y = 20; \end{cases}$ | 10) $\begin{cases} 6x - y = -1, \\ 2x - 3y = -11; \end{cases}$ | 11) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$ | 12) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 9y - 2x = -25. \end{cases}$ |

4. Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

- | | | | |
|---|---|---|--|
| 1) $\begin{cases} 2x - 6y = 7, \\ 5x + 4y = 3; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} 7x + 6y = 2, \\ 35x + 9y = 34; \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 8; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ 5x - y = 10; \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} -6x + y = 16, \\ 6x + 4y = 34; \end{cases}$ | 7) $\begin{cases} 4x - y = 20, \\ 4x + y = 12; \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} 9x + 17y = 52, \\ 26x - 17y = 18. \end{cases}$ |

5. Знайдіть два числа, якщо їхня сума дорівнює 63, а різниця становить 19.
6. Група з 46 туристів і туристок вирушила в похід на 10 човнах, частина з яких була чотиримісними, а решта — шестимісними. Скільки було човнів кожного виду?
7. Знайдіть два числа, якщо їхня різниця дорівнює 23, а сума подвоєного більшого із цих чисел і другого числа дорівнює 22.
8. Для того щоб нагодувати 4 коней і 12 корів, потрібно 120 кг сіна на день, а щоб нагодувати 3 коней і 20 корів — 167 кг сіна. Знайдіть денну норму сіна для коня та для корови.
9. За перший день 2 гусеничні трактори й один колісний трактор зорали 22 га, а за другий день 3 гусеничні і 8 колісних — 72 га. Знайдіть, скільки гектарів землі може зорювати щодня один гусеничний трактор і скільки — один колісний.
10. Двоє робітників виготовили 135 деталей. Перший робітник працював 7 днів, а другий — 12 днів. Скільки деталей виготовляв щодня кожний робітник, якщо перший за 3 дні виготовив на 3 деталі більше, ніж другий — за 4 дні?

Рівень В

1. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x + 7y = 12, \\ 3x - 2y = -7; \end{cases}$	3) $\begin{cases} 2x - 3y = -10, \\ 6x - y = 2; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2x + 5y = -4, \\ 7x - 2y = 25; \end{cases}$	5) $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ y = -0,2x; \end{cases}$	6) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$
2. При яких значеннях a не має розв'язків система рівнянь $\begin{cases} 8x + 9y = 7, \\ 8x + 9y = a? \end{cases}$
3. При якому значенні a має безліч розв'язків система рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 5y = 4, \\ 4x + 20y = a; \end{cases}$	2) $\begin{cases} 3x + ay = 12, \\ 9x - 15y = 36? \end{cases}$
---	--
4. Доберіть такі значення a і b , при яких система рівнянь $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ ax + 4y = b : \end{cases}$
 - 1) має безліч розв'язків;
 - 2) має єдиний розв'язок;
 - 3) не має розв'язків.
5. Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

1) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 5x + 2y = 24; \end{cases}$	3) $\begin{cases} 5y - 6x = 4, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$	4) $\begin{cases} 4x + 5y = 1, \\ 8x - 2y = 38; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 5a - 4b = 3, \\ 2a - 3b = 11; \end{cases}$	6) $\begin{cases} 8m - 2n = 11, \\ 9m + 4n = 8; \end{cases}$	7) $\begin{cases} 5x + 2y = 15, \\ 8x + 3y = 20; \end{cases}$	8) $\begin{cases} 7x + 4y = 5, \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$
6. Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} 8x + y = 8, \\ 12x + y = 4; \end{cases}$	2) $\begin{cases} 7x - 5y = 29, \\ 7x + 8y = -10; \end{cases}$	3) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 4x + 9y = 41; \end{cases}$	4) $\begin{cases} 10x + 2y = 12, \\ -5x + 4y = -6; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26; \end{cases}$	6) $\begin{cases} 3x + 8y = 13, \\ 2x - 3y = 17; \end{cases}$	7) $\begin{cases} 3x - 4y = 16, \\ 5x + 6y = 14; \end{cases}$	8) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + 5y = 8; \end{cases}$

$$9) \begin{cases} 5x - 2y = 16, \\ 8x + 3y = 38; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 5x - 4y = 10, \\ 2x - 3y = -3. \end{cases}$$

- 5.** Із села до станції вийшла туристка. Через 30 хв із цього села до станції виїхав велосипедист, який наздогнав туристку через 10 хв після початку руху. Знайдіть швидкість велосипедиста, якщо за 3 год туристка проходить на 4 км більше, ніж велосипедист проїжджає за півгодини.
- 6.** Із Житомира до Одеси, відстань між якими 536 км, виїхав автомобіль. Через 2,5 год після початку руху першого автомобіля назустріч йому з Одеси виїхав другий автомобіль, який зустрівся з першим через 2 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо перший за 2 год проїжджає на 69 км менше, ніж другий за 3 год.
- 7.** Коли до першого вагона електропотяга ввійшли 4 пасажери, а з другого вагона вийшли 4 пасажери, то в обох вагонах пасажирів стало порівну. Якби до першого вагона ввійшли 2 пасажери, а до другого — 24 пасажери, то в першому вагоні стало б удвічі менше пасажирів, аніж у другому. Скільки пасажирів було спочатку в кожному вагоні?

Рівень С

- 1.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} |x| - y = 0, \\ x - y = -4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y + |x| = 0, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} |x| - y = 0, \\ x + 3y = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - |y| = 0, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

- 2.** Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

$$1) \begin{cases} 6 - 5(x - y) = 7x + 4y, \\ 3(x + 1) - (6x + 8y) = 69 + 3y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2, \\ 5x - y = 34; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{3y-x}{4} = -4\frac{3}{4}; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1,5x-3}{3} + \frac{7-3y}{8} = 3, \\ \frac{2,5x-2}{3} - \frac{2y+1}{6} = x - 0,5; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 6x + 3 = 5x - 4(5y + 4), \\ 3(2x - 3y) - 6x = 8 - y; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 4, \\ \frac{3x+y}{4} - \frac{2x-5y}{3} = 5. \end{cases}$$

- 3.** Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

$$1) \begin{cases} 2(4x - 5) - 3(3 + 4y) = 5, \\ 7(6y - 1) - (4 + 3x) = 21y - 86; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -2(2x + 1) + 2,5 = 3(y + 2) - 8x, \\ 8 - 5(4 - x) = 6y - (5 - x); \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 0,2x - 0,3(2y + 1) = 1,5, \\ 3(x + 1) + 3y = 2y - 2; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3, \\ \frac{3x}{4} + \frac{5y}{6} = 4; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{x+2}{6} - \frac{y-3}{15} = 1, \\ \frac{x+2,5}{9} - \frac{y+3}{6} = \frac{1}{3}; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \frac{15x-3y}{4} + \frac{3x+2y}{6} = 3, \\ \frac{3x+y}{3} - \frac{x-3y}{2} = 6; \end{cases}$$

4. Знайдіть розв'язок системи рівнянь методом додавання:

$$1) \begin{cases} (x-3)^2 - 4y = (x+2)(x+1) - 6, \\ (x-4)(y+6) = (x+3)(y-7) + 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x-y)(x+y) - x(x+10) = y(5-y) + 15, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x+4)^2 + (y+2)^2 - 18; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (2x+1)^2 - (2x-y)(2x+y) = (y+8)(y-10), \\ 4x(x-5) - (2x-3)(2x-9) = 6y - 104; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (x-2)(x^2 + 2x + 4) - x(x-4)(x+4) = 20 - 20y, \\ (3x-2)(4y+5) = 2y(6x-1) - 58. \end{cases}$$

5. Син 6 років тому був у 4 рази молодший від батька, а через 12 років він буде молодшим від батька у 2 рази. Скільки років батькові та скільки — синові?

6. Із двох селищ, відстань між якими дорівнює 45 км, одночасно назустріч один одному вирушили велосипедистка й пішохід, які зустрілися через 3 год після початку руху. Якби велосипедистка виїхала на 1 год 15 хв раніше, ніж вийшов пішохід, то вони зустрілися б через 2 год після виходу пішохода. З якими швидкостями рухалися велосипедистка й пішохід?

7. Із пунктів A і B , відстань між якими дорівнює 24 км, одночасно назустріч одна одній вирушили дві туристки. Через 2 год після початку руху вони ще не зустрілися, а відстань між ними становила 6 км. Ще через 2 год одній з них залишилося пройти до пункту B на 4 км менше, ніж другій — до пункту A . Знайдіть швидкості руху кожної туристки.

Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

.....
.....
.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....
.....
.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....
.....
.....

